



复旦大学金融学研究生
学位课程教材

丛书主编 姜波克

FINANCIAL ENGINEERING

金融工程学

编著 范龙振
胡 畏

上海人民出版社



复旦大学
金融学研究生
学位课程教材

《国际金融学》
姜波克 陆前进 编著

《货币银行学》
胡庆康 张卫东 编著

《现代投资学》
孔爱国 编著

《金融市场学》
刘红忠 编著

《金融工程学》
范龙振 胡畏 编著

《公司财务学》
朱叶王伟 编著

《金融经济学》
孙立坚 编著

《数学金融学》
雍树敏 刘道百 编著

ISBN 7-208-04560-7



9 787208 045606 >

定价 30.00 元

易文网 : www.ewen.cc

FINANCIAL
金融工程学
ENGINEERING

编著 范龙振
胡 畏

上海人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

金融工程学/范龙振,胡畏编著.

—上海:上海人民出版社,2003

复旦大学金融学研究生学位课程教材

ISBN 7-208-04560-7

I. 金... II. ①范... ②胡... III. 金融学-研

究生-教材 IV. F830

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 009489 号

责任编辑 忻雁翔

美术编辑 王晓阳

装帧设计 张国梁

· 复旦大学金融学研究生学位课程教材 ·

金融工程学

范龙振 胡畏 编著

世纪出版集团

上海人民出版社出版、发行

(200001 上海福建中路 193 号 www.ewen.cc)

由新华书店上海发行所经销 商务印书馆上海印刷股份有限公司印刷

开本 787 × 1092 1/16 印张 16.75 插页 4 字数 340,000

2003 年 5 月第 1 版 2003 年 5 月第 1 次印刷

印数 1—6,000

ISBN 7-208-04560-7/F · 983

定价 30.00 元

**复旦大学金融学研究生
学位课程教材**

丛书主编 姜波克

总前言

“复旦大学金融学研究生学位课程教材”是复旦大学金融学科建设计划项目，其用意是将当今金融学的各重要分支作为金融学研究生教材建设内容，形成学科建设的示范效应，进一步提升金融学教学和科研的水平，推动金融学各重要分支人才的培养。现在呈献给大家的这8本教材就是该项目的最终成果，它们是：《国际金融学》、《货币银行学》、《现代投资学》、《金融市场学》、《金融工程学》、《公司财务学》、《金融经济学》和《数学金融学》。这套教材涉及的领域很宽，其中既有早已被学界认同的国际金融学和货币银行学，也有在我国有待发展的金融市场学、金融工程学、现代投资学、公司财务学、金融经济学和数学金融学。

我们将这套教材定位在金融学研究生学位课程教材上，不是为了追求全国首套金融学研究生教材的名分，而是想为复旦大学乃至全国的金融学科建设尽自己的一份力量。为此，我们精心组织了在相关课程上有多轮教学经验并长期从事本领域研究的教授负责本套教材的编写工作，总投入48万元，历时三年，力图使这套教材能够体现出三个特色。第一，前沿性。教材充分反映了金融学各主要分支学科的核心内容、主要研究方法以及目前最新的研究成果。第二，交叉性。整套教材的框架兼收并蓄了宏观金融学和微观金融学。值得一提的是，金融学领域的重大变化和发展趋势的微观化，在我们这套教材中得到了充分的体现，其中有5本教材即属于微观金融的范畴。此外，定量分析和定性分析的内容在每一本教材中也得到了较合理的安排。第三，衔接性和层次性。研究生教材既要与本科生教材有衔接性，又要注重培养研究生的独立科研能力，在层次上与本科生教材要有所不同。目前，我国研究生阶段的教学与本科教学的台阶不明显，这在很大程度上与研究生教材的教学深度不够有关。因此在编写本套教材时我们尤其注意这一点，做到了在内容上拉开与同类专业课程的本科生教材的档次。

本套教材的编撰出版得到了上海人民出版社的大力支持。除了给予启动经费的支持外，上海人民出版社的同仁们还在多次有关教材的协调会上提出了诸多宝贵的意见，在此深表感谢。同时，我们也恳切希望全国高校的教师和研究生就本套教材使用中出现的问题向我们提出宝贵意见。

姜波克
2002年11月

前言

金融工程是 20 世纪 80 年代末 90 年代初出现的一门新兴学科。它主要指以现代金融理论为基础,综合利用数学模型、数值计算等开发、设计金融产品,创造性地解决各种金融问题。约翰·芬尼迪对此给出过一个权威性的定义:金融工程包括创新金融工具与金融手段的设计、开发与实施,以及对金融问题给予创造性的解决。从定义里我们可以看到金融工程的核心在于创新和创造。在本书里,我们把金融工程理解为:为开发新型金融产品,解决投资、筹资和风险管理等金融问题,而形成的一系列典型的实用的定量化方法。这些方法包括创新金融工具的设计、价值评价和风险度量方法,投资组合的构造方法,风险管理方法等。金融工程涉及的范围很广,如果我们按市场来划分,金融工程包括固定收益债券中的金融工程、股票市场的金融工程、股票衍生证券市场的金融工程、外汇市场的金融工程,还包括近年来金融创新最为成功的互换市场的金融工程等。范围如此之广,内容如此之多,不是一本书能够完全介绍的。本书主要讨论四个市场:固定收益债券市场、股票衍生证券市场、外汇衍生证券市场和互换市场。股票市场涉及内容之丰富,完全可以另写一本书来介绍,并且股票市场的有关内容是投资学这门课重点介绍的。当然我们这样选择还基于这样一个事实:这四个市场的金融工程问题均主要用到无套利定价理论,以及在此基础上发展出来的风险中性(鞅)定价方法、折现因子定价方法,也就是说这些问题都可以放在一个理论框架下,求解方法也是大部分类似的。这也使本书成为一个有机的整体。

本书的成稿得益于作者在美国麻省理工学院斯隆管理学院的访问。作者在 1999 年春季到麻省理工学院访问进修,学习了考克斯(John Cox)教授为 MBA 金融工程专业所开的两门课程“投资银行学”(Investment Banking)和“期权与期货”(Option and Futures),也进修了洛(Undrew Lo)教授为 MBA 学生所开的“金融工程分析”(Analytics of Financial Engineering)和博士生课程“金融经济学——实证研究”(Financial Economics — Empirical Study)。两位教授还提供了大量的科研教学资料。

本书的前六章由范龙振执笔,后五章由胡畏执笔,由范龙振定稿。“金融工程学”是我校金融工程专业方向和财务管理专业方向研究生的专业课,也是财务金融系理财学专业本科生的专业选修课。本书在出版以前,作者已给金融工程及相关专业的研究生、财务金融系的高年级本科生讲授过这门课程,学生们提供了很多有

益的建议，也增强了我们写好本书的信心。

《金融工程学》作为复旦大学研究生学位课程教材之一，能够出版，得益于我校金融研究院的建立。此外还需说明的是，由于作者水平有限，书中缺点和错误在所难免，希望读者指正。

作者

2002年9月于复旦大学

002

金融工程学

目 录

总前言	001
前言	001
第 1 章 绪论	001
1.1 衍生证券	001
1.2 无套利定价	005
1.3 金融资产定价的一般方法:折现因子法	011
1.4 二叉树模型	015
本章小结	018
复习与思考	019
参考文献	020

第 1 篇 固定收益债券

第 2 章 债券的基本概念	024
2.1 国债的价格与收益率	024
2.2 不付息债券和利率的期限结构	027
2.3 债券的定价与设计	028
2.4 远期价格与远期利率	030
本章小结	033
复习与思考	033
参考文献	034
第 3 章 久期和凸度	036
3.1 久期	036

001
目
录

3.2 久期的性质	039
3.3 久期与风险管理	042
3.4 凸度	045
3.5 凸度与风险管理	049
3.6 计算久期的其他方法	053
3.7 浮动利率债券的久期	054
本章小结	056
复习与思考	057
参考文献	057
第 4 章 二叉树利率模型与复杂利率证券的价格、风险	059
4.1 债券价格的随机变化及风险中性概率	059
4.2 风险中性利率模型之一: Ho-Lee 模型	063
4.3 Ho-Lee 模型的应用	069
4.4 复杂利率证券的价格	071
4.5 复杂衍生证券的风险	074
4.6 可赎回债券、可卖回债券的价格和风险	076
本章小结	081
复习与思考	082
参考文献	083
第 5 章 常见的利率模型及实证分析	084
5.1 利率期限结构	084
5.2 利率期限结构与预期理论	088
5.3 金融资产定价理论和基本的利率模型	090
5.4 CIR 模型	095
5.5 无套利定价模型	099
5.6 非正态模型——Das 跳跃模型	103
5.7 多因子模型	104
5.8 利率衍生产品的定价	107
本章小结	108
复习与思考	112
参考文献	113
附录 Black-Derman-Toy 模型的推导	114
第 6 章 互换	115
6.1 互换的定义	115

6.2 互换与债券、远期、期权	118
6.3 互换的定价	121
6.4 互换的应用	124
本章小结	128
复习与思考	128
参考文献	129

第 2 篇 股票期权及其定价

第 7 章 股票期权的一些基本概念	134
7.1 股票期权	134
7.2 基本交易策略	139
7.3 股票期权价值的决定因素	151
7.4 股票期权价格特征	154
本章小结	163
复习与思考	163
参考文献	164
第 8 章 股票期权的定价模型	165
8.1 股票价格的二叉树模型	165
8.2 二叉树模型期权定价方法	168
8.3 Black-Scholes 期权定价模型	177
本章小结	183
复习与思考	184
参考文献	184
附录 Black-Scholes 期权定价公式的推导	185
第 9 章 期权定价模型的使用	188
9.1 Black-Scholes 模型的使用	188
9.2 美式期权	193
9.3 期权的套期保值	199
本章小结	206
复习与思考	207
参考文献	207

第3篇 期权定价理论的应用

第 10 章 股指期货与期权	212
10.1 股指期货	212
10.2 股指期货交易策略	218
10.3 股指期权及股指期货期权	226
本章小结	232
复习与思考	233
参考文献	233
第 11 章 外汇期货和期权	234
11.1 外汇期货和远期合约	234
11.2 外汇期货交易策略	240
11.3 外汇期权	248
本章小结	255
复习与思考	256
参考文献	257

绪论

1.1 衍生证券

除涉及到普通证券如股票、债券以外，金融工程的大量内容涉及衍生证券。这是因为衍生证券构成了金融创新最重要的内容；二是因为衍生证券的价值评价和风险度量较为复杂，金融工程必须以较多的篇幅去讨论它们；三是因为利用衍生证券进行投资、筹资和风险管理已形成了一系列非常实用的方法。衍生证券可以划分为三大基本类别：(1)远期和期货；(2)期权；(3)互换。远期和期权是最基本的衍生证券，其他更复杂的衍生证券可以认为是由远期和期权组合而成。如互换就可以看成一系列远期合约的组合。下面我们将对这一类衍生证券作一个简单的讨论。

1.1-1 远期和期货

定义 1.1 远期合约是买卖双方签订的一份合约，它规定在将来某个时间以一定价格交割某项资产。

远期合约的特点是在合约签订之日就规定了交割的时间、交割的价格以及交割的资产，这个资产一般称为标的资产，交割的时间称为交割日，事先确定的价格称为交割价。远期合约中标的资产的购买方称为多头方；卖方称为空头方。在金融中多头方也是指看涨方，标的资产价格的上涨将会给其带来收益，而下降会带来损失；空头方则相反。

如果以 S_T 代表到期日标的资产的价格， K 代表交割价格，对于远期合约多头方来说，远期合约在到期日的收益为 $S_T - K$ ，而空头方的收益为 $K - S_T$ 。

如果在远期合约到期日，标的资产的价格比远期合约规定的交割价格要高，多头方就会得到正的收益，而空头方得到数量同样多的负的收益；反之，如果在到期日标的资产的价格比远期合约规定的交割价格要低，多头方的收益为负而空头方的收益为正。即多头方的收益就是空头方的损失，反之亦然。远期合约的这个特点使得远期合约在签订之日的价值一定为零。使得远期合约价值为零的交割价格称为远期价格。远期合约在签订之日价值一定为零，否则对一方不公平，因此此时

交割价格等于远期价格,但远期合约签订之后,交割价格不再变动,而标的资产的市场价格却在不确定地变化着,远期价格也随之发生改变,除了偶然因素之外,远期价格和交割价格不再相同。

期货合约也是买卖双方签订的在将来某个时间以一定的价格买卖标的资产的合约。但在以下几个方面期货合约与远期合约不同:

(1) 期货合约在正规化的交易所交易,为了使交易能正常进行,期货合约要满足一些标准化的条款;而远期合约条款可以由交易双方自由制订,远期合约也可以在柜台交易。

(2) 期货交易通过交易清算中心进行清算,通过保证金和盯市降低违约风险。

(3) 期货合约交易实行盯市制度,每交易日期货都进行平仓,同时形成一个新的期货合约。损失或收益都记在保证金账户里。

1.1-2 期权

定义 1.2 一份期权是一份合约,它赋予合约的一方,即期权的购买者(也称期权的持有者,option holder),在指定的时间内,以确定的价格购买(或出售)一定数量的某种商品的权利。

远期合约和期货合约的持有者不仅有权利而且有义务执行合约,与远期合约、期货合约不同的是,期权对持有者来说是一种权利而没有必须执行的义务。当期权到期时,期权持有者可以选择行使合约赋予他的权利,或者放弃权利。而合约的另一方,即期权的出售者(option writer),有时也称为期权提供者(option grantor)却只承担义务而不享有权利。也就是说,当期权持有者选择行使合约赋予他的权利时,期权的出售者就必须履行他的义务,按确定的价格将某种商品出售给期权持有者(或从期权持有者处购买某种商品)。可见,在期权合约中,双方的权利和义务不是对等的,由于不需要承担责任的权利是具有价值的,为了使出售者愿意接受合约规定的义务,期权的购买者必须支付给出售方一定的费用,这笔费用称为期权费(premium),也是期权的价格。

一份期权合约,通常包含以下几个要素:

(1) 标的资产(underlying asset)。

标的资产是期权合约所指定的双方将来要交易的某种商品,它可以是某种实物资产,也可以是某种金融资产,比如某种等级的小麦,或者是某个公司的普通股股票。一般来说,与期货的标的资产一样,能够作为期权合约的标的资产的商品,必须具有流通量大、交易活跃、易于确定等级等特点。

(2) 到期日(expiration date)。

期权合约所赋予的权利是有期限的,一旦超过这个期限,期权就将失效,因此,在期权的到期日,期权持有者必须决定是否要行使权利。一般来说,在进行期权的报价时,往往用到期月的形式给定到期日,例如在CBOT交易的股票期权,其到期日是在到期月的第三个星期五之后紧接的那个星期六。后面我们会发现,知道确

切的到期日对确定期权的价值是非常重要的,尤其是当期权快要到期的时候,几天的剩余时间的差别可能造成期权价值的巨大差异。

(3) 执行价格(strike price)。

执行价格有时也称为履约价格(exercise price),是由期权合约所规定的,将来用于交割标的资产的价格,也就是说,期权合约的持有者有权按照期权合约所规定的执行价格购买(或出售)一定数量的标的资产。对同一标的资产的期权,交易所可以指定不同的执行价格。具有不同的执行价格的期权,即使它们的标的资产是相同的,它们也属于不同的期权。例如,同样是以 IBM 公司普通股股票为标的资产的期权,它们的执行价格可以分别为 90 美元、95 美元、100 美元、105 美元等。对于股票期权,交易所通常规定,当股票价格低于 25 美元时,执行价格的变动间隔为 2.5 美元,当股票价格高于 25 美元而低于 200 美元时,执行价格的变动间隔为 5 美元,而当股票价格高于 200 美元时,执行价格的变动间隔为 10 美元。引入新的期权时,交易所通常选择具有最接近股票现价的两个执行价的期权进行交易。例如,当交易所开始交易 10 月份到期的 XYZ 公司股票期权时,XYZ 公司的股票市场价格为 102 美元,那么交易所就提供执行价格为 100 美元和 105 美元的期权给投资者进行交易,如果 XYZ 公司股票的市场价格上升到超过 105 美元,则交易所再提供执行价格为 110 美元的期权,这样,同时在交易所交易的 10 月份到期的 XYZ 公司股票的期权就有三个不同的执行价格。

(4) 看涨或看跌(call or put)。

一些期权合约规定期权持有者有权购买标的资产,而另外一些期权却是出售标的资产的权利。按确定价格购买标的资产和按确定价格出售标的资产是两种不同的权利,赋予持有者购买标的资产权利的期权称为看涨期权(call option),赋予持有者出售标的资产权利的期权称为看跌期权(put option)。正如“看涨”和“看跌”的字面意义,看涨期权可以使持有者从标的资产价格上涨中获益,看跌期权可以使持有者从标的资产价格下跌中获益。

(5) 美式或欧式(American style or European style)。

还有一点在期权合约中需要指明的是,期权持有者是否可以在期权到期日之前行使权利。可以在到期日前执行的期权称为美式期权(American option),而只能在到期日执行的期权称为欧式期权(European option)。股票期权一般是美式的,也就是说,期权的持有者可以在到期日之前的任何交易日提前行使合约赋予他的权利,当然,如果提前行使了权利,则期权合约也就提前结束了。

1.1-3 互换(swap)

互换是近年来最为成功的金融创新产品,互换在金融分析师看来已成为常规的利率和汇率风险管理手段。

第一个互换合约出现在 1981 年,是一个以德国马克表示的现金流与以瑞士法郎表示的现金流相交换的合约。它是一个货币互换。第一个标准的利率互换出现

在 1982 年。互换的产生要归结为一个词：波动率(volatility)，即利率和汇率的波动性或称为风险。汇率的大幅度波动是 1971 年布雷顿森林汇率体系终结以后，各国允许汇率按市场需求浮动；而利率的大幅度波动是在 1979 年以后，美联储为了抑制通货膨胀，放松了对短期利率的控制。

互换早期产生的一个动因是利用不同金融市场上资金成本的差别，来降低资金成本。也就是说互换的产生是为了套利。但在今天，互换的这个作用已经比较小了。互换的使用者是公司或机构管理者，他们使用互换来使经营收益或资产负债免受利率或汇率不利变化的影响。

互换有时也翻译成掉期。互换可以划分为两大类：利率互换和货币互换。利率互换涉及的是同一种货币表示的现金流的交换，现金流的计算一般是以某一个名义本金乘以某种利率。最普通的利率互换是，一方用固定利率乘以名义本金计算现金流量，另一方用浮动利率乘以名义本金计算现金流量。货币互换是双方定期交换以一个名义本金作基础，但用不同币种和利率计算出的现金流。货币互换不同于利率互换：首先，交换的是采用不同货币表示的现金流；其次，货币互换要交换本金。

定义 1.3 利率互换是指双方签订的一个合约，规定在一定时间里，双方定期交换以一个名义本金作基础，用不同利率计算出的现金流。

定义 1.4 货币互换是指双方签订的一个合约，规定在一定时间里，双方定期交换以一个名义本金作基础，但用不同币种和利率计算出的现金流。

与远期和期权比较，互换是更复杂的衍生证券。互换的重要性主要体现在它的实用价值上，它在公司的资产负债管理和风险管理等方面起着独特的作用，当然套利也是它产生与发展的一个重要原因。但互换能成为近年来最为成功的金融创新产品，并且规模越来越大，套利不是一个主要原因，因为互换发展到一定规模后，能够利用它套利的机会已经很少了。

互换可以分解成一系列远期或期权的组合，有了远期和期权的价值评价和风险度量方法，它的价值评价和风险度量都可以相应地解决。

1.1-4 金融产品之间的关联

市场上金融产品形式多样，但从本质上讲，它们都可以看成是某种普通的金融产品（如股票和债券），或者是上述三种衍生产品，或者是它们的复合产品。

证券的关系可以简单地这样来看：购买一个金融产品相当于一方面提供了资金，另一方面承担了风险。因此可以把金融产品看成两个产品的复合，一个产品只提供资金，不承担风险，相当于把资金投资于短期国债；另一个产品只承担金融资产的风险，不提供资金，这个金融产品就是以原金融资产为标的远期合约。远期合约既有权利，也有义务，如果想把权利和义务分开，只要求它的权利，就进一步可以把远期合约分成两个产品：一个是与远期合约具有同样到期日和同样执行价的欧式看涨期权，另一个是具有同样到期日和同样执行价的欧式看跌期权。即远期合

约可以看成是这两个期权的组合：一个看涨期权的多头，一个看跌期权的空头。

也可以用股票来代表这个金融资产，假定某投资者想购买某股票，现价是 S_t ，投资期是 $T-t$ ，购买股票既提供资金又承担股票的风险。资金具有时间价值，提供资金要求得到资金的时间价值，这部分收益构成股票的无风险收益。购买股票也承担了企业的风险，投资者同样要求有回报，这部分回报构成了股票的风险金。如果要把资金的提供和风险的承担分开，可以把股票看成如下两个资产的组合：现价是 S_t 并在时间 $T-t$ 到期的不付息国债和一个在时间 T 到期并以该股票为标的远期合约的多头。不付息国债提供了资金的时间价值，而远期合约只有风险，它等于股票的风险。远期合约还可以进一步分解，它可以看成是期权的投资组合：在时间 T 时到期，以股票为标的，执行价等于远期合约执行价的欧式看涨期权的多头，和在时间 T 时到期，以股票为标的，执行价等于远期合约执行价的欧式看跌期权的空头。它们的关系可以用图 1.1 表示。我们可以看到，股票可以进行拆分，变成衍生证券和国债的复合，其他更复杂的证券也可以作同样的拆分。

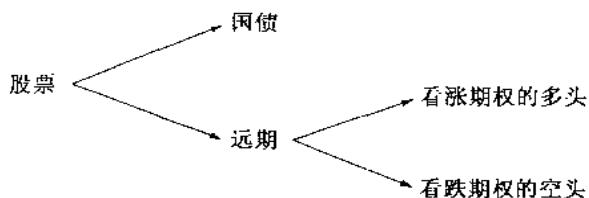


图 1.1 股票和衍生证券之间的关系

图 1.1 也反映了衍生证券存在的价值。如果市场只有股票，你必须在提供资金的同时承担股票的风险。有了股票的远期合约以后，就可以选择只承担股票的风险，不提供资金；有了国债，就可以选择只提供资金，不承担风险。进一步有了期权以后，就可以以较少的资金，从股票看涨或看跌中获利。有了衍生证券，投资选择更加灵活。如果倒过来看，衍生证券也可以帮你对金融资产进行风险管理。如果购买了股票，承担了股票的风险，就可以用远期合约的空头对冲股票的风险。

1.2 无套利定价

金融工程得益于现代金融理论的发展。现代金融理论可以说开始于马柯维茨的资产组合理论、资本资产定价理论[包括夏普(Sharpe)等的 CAPM, 考克斯(Cox)、英格索尔(Ingersoll)和罗斯(Ross)的 ICAPM, 布里登(Breeden)的 CCAPM]和期权定价模型(Black and Scholes, 1973)构成了现代金融理论的基本框架。金融理论有两种重要的定价理论，一种是均衡定价理论，另一种是无套利定价理论。均衡定价理论与经济学的均衡理论是一样的，在此不作讨论。无套利定价理论利用了一个简单的道理：各种资产的价格应该具有一致性。

衍生证券价值评价的核心理论是无套利定价理论。无套利就像我们所说的没

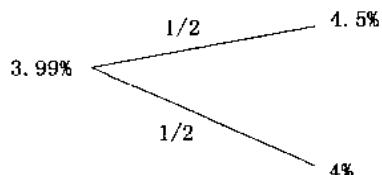
有免费的午餐。如果资本市场有套利机会,投资者就可以不花成本地得到大量收益,这样的资本市场具有免费的午餐。因此资本市场无套利机会是对资本市场的基本要求,是一个运行良好的市场须满足的一个基本条件。无套利定价理论是在假定资本市场没有套利机会的情况下对证券的价值进行评价的理论。如果市场具有套利机会的话,无套利定价理论也可以帮助我们发现套利机会。实际上,无套利市场一定满足某种均衡。

套利简单来讲就是同时持有一种或多种资产的多头或空头,从而在不承担风险的情况下锁定一个高于无风险利率的收益。如果这样的机会存在的話,我们就称之为套利机会。常用的套利方法有两种:

- (1) 现在进行净支出为零的一系列投资,在将来不会出现负的收益,而且有可能出现正的收益;
- (2) 现在进行一系列能带来正收益的交易,这些交易不会使未来产生净的支付。

1.2-1 一个例子

假定半年期和一年期即期年利率分别是3.99%和4.16%(名义年利率,半年复利一次)。再假定半年以后的半年期即期利率有两种等可能的取值:4%和4.5%,用二叉树表示为:



知道当前的即期利率,就可以确定半年后和一年后到期的面值为100的不付息债券 z_1 和 z_2 的现价,其现价仍记为 z_1 , z_2 :

$$z_1 = \frac{100}{1 + \frac{3.99\%}{2}} = 98.044$$

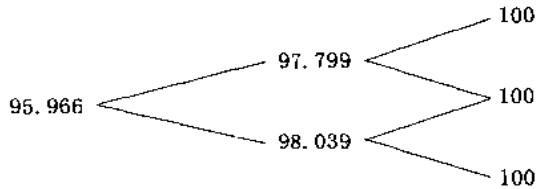
$$z_2 = \frac{100}{\left(1 + \frac{4.16\%}{2}\right)^2} = 95.966$$

有了利率变化的预测,就可以求出半年后一年期不付息债券 z_2 的两种可能取值为97.799,98.039,计算公式为:

$$97.799 = \frac{100}{1 + \frac{4.50\%}{2}}$$

$$98.039 = \frac{100}{1 + \frac{4.00\%}{2}}$$

z_2 价格变化的二叉树表示为：



半年后(记为时间 $t = 1$)不付息债券价格的期望值是：

$$\frac{1}{2} \times 97.799 + \frac{1}{2} \times 98.039 = 97.919$$

如果以无风险利率折现到现在(记为时间 $t = 0$)，得：

$$\frac{\frac{1}{2}(97.799 + 98.039)}{1 + \frac{3.99\%}{2}} = 96.004 > 95.966$$

两者不等的原因在于，从现在看，一年期不付息国债在半年后的价格是不确定的，是有风险的，对于这个价格风险，人们要求高于无风险利率的收益率，可以算出人们要求的收益率 y 是：

$$95.966 = \frac{97.919}{1 + \frac{y}{2}}$$

$$y = 4.0702\%$$

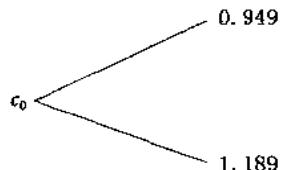
假定另外一个问题，一个看涨期权，期权持有者可以以价格 96.850 在半年后购买面值是 100 的一年期国债 z_2 ，这个看涨期权在半年后的价值有两种可能：

$$\max(97.799 - 96.850, 0) = 0.949$$

和

$$\max(98.039 - 96.850, 0) = 1.189$$

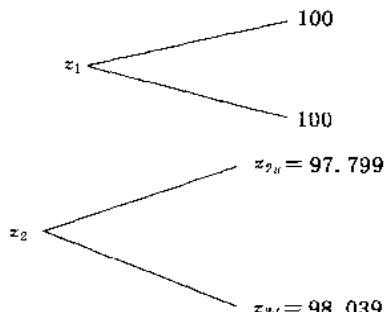
记看涨期权现在的价格为 c_0 ，看涨期权价格的变化用二叉树表示为：



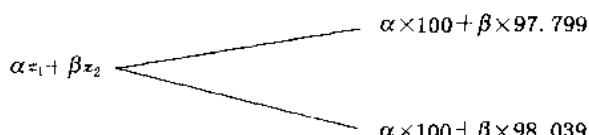
现在想知道它今天的合理价格,这个问题可以通过无套利定价方法来解决。

1.2-2 无套利定价:资产组合策略

为了评价上面例子中的国债看涨期权,引进一些记号:用 z_{2u} 和 z_{2d} 分别表示半年后一年期不付息债券 z_2 的两种可能价值。 z_1 和 z_2 的价格变化用二叉树表示为:



构造一个资产组合: α 份半年期国债 z_1 和 β 份一年期 z_2 。资产组合的现价和半年后的价值用二叉树表示为:



现在让这个资产组合的价值与看涨期权的价值半年后在两种情况下都相等,即

$$\alpha \times 100 + \beta \times 97.799 = 0.949$$

$$\alpha \times 100 + \beta \times 98.039 = 1.189$$

解这两个方程就可以得到:

$$\alpha = -1.005$$

$$\beta = 1.037$$

这个资产组合在时间1的价值与期权相同,根据无套利定价理论,它的现价一定相同,即

$$c_0 = \alpha z_1 + \beta z_2 = 1.004$$

1.2-3 期望值折现方法

在1.2-1的例子中,两种经济状态出现的概率各为 $1/2$,而我们在通过资产组

合策略求期权的价格时没有用到这个概率。未来时间各种经济状态出现的概率这个信息是否有助于我们求解证券的价格？难道它没有用吗？在回答这个问题以前，首先必须明确一点：通过资产组合策略求出的期权价格是合理的价格，是无套利机会存在的情况下期权的合理价格。

知道未来时间各个经济状态出现的概率可以使我们以更直观的方式考虑资产的价格问题，也就是把价格看成未来收益的期望值以适当的折现率折现的现值。有了各种经济状态出现的概率，可以求出在 $t = 1$ 时证券价格的期望值，但要想知道证券在时间 $t = 0$ 的价格，还需要知道证券的期望回报率。证券是有风险的，期望回报率高于无风险利率，二者之差称为风险金。一种简单办法是把风险金与证券风险联系起来。证券的风险一般情况下可以用证券回报率的标准差来度量，用连续复利的回报率的标准差表示更为合适。仍以 1.2-1 中的例子说明。证券 z_2 的连续复利回报率的标准差为：

$$\begin{aligned}\sigma_{z_2} &= \frac{1}{2} |\ln z_{2u} - \ln z_{2d}| \\ &= \frac{1}{2} (\ln 98.039 - \ln 97.799) = 0.125\%\end{aligned}$$

其中 $\ln(\cdot)$ 代表自然对数函数。证券 z_2 的单位风险的超额回报率，也称单位风险的市场价格，记为 λ ，其取值为：

$$\begin{aligned}\lambda &= \left[\ln\left(1 + \frac{1}{2} \times 4.0638\%\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{2} \times 3.99\%\right) \right] / \sigma_z \\ &= 0.2894\end{aligned}$$

其中 $\ln\left(1 + \frac{1}{2} \times 4.0638\%\right)$, $\ln\left(1 + \frac{1}{2} \times 3.99\%\right)$ 把收益率转化为连续复利的收益率。

欧式看涨期权 c 的波动率或称标准差为：

$$\begin{aligned}\sigma_c &= \frac{1}{2} |\ln c_{1u} - \ln c_{1d}| \\ &= \frac{1}{2} (\ln 1.189 - \ln 0.949) \\ &= 0.1175\end{aligned}$$

欧式看涨期权 c 是以证券 z_2 为标的的衍生资产，它们具有同样的风险源，欧式看涨期权的单位风险的超额回报率也应该是 λ 。因此欧式看涨期权 c 的回报率应为：

$$\begin{aligned}\mu_c &= \ln\left(1 + \frac{1}{2} \times 3.99\%\right) + \lambda \times \sigma_c \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{2} \times 3.99\%\right) + 0.2894 \times 0.1175 \\ &= 5.38\%\end{aligned}$$

欧式期权在时间 $t = 1$ 时的期望价格为：

$$\begin{aligned} Ee_1 &= \frac{1}{2} \times 1.189 + \frac{1}{2} \times 0.949 \\ &= 1.064 \end{aligned}$$

知道了证券 e 在时间 $t = 1$ 的期望值，又知道了它的期望回报率，就可以知道证券 e 的现价：

$$\begin{aligned} e_0 &= \exp(-\mu_e) Ee_1 \\ &= 1.008 \end{aligned}$$

用这种方法计算出的欧式期权的现值与资产组合策略计算出的结果非常接近，因此这种方法是近似正确的。实际上这种方法在一些假定下是正确的，我们在后面还会有详细讨论。也就是说，通过现实世界中的概率也能够发现衍生证券的合理价格，但这种看起来比较直观的方法却是复杂的方法，这体现在怎样确定风险和回报之间的关系，以及怎样确定单位风险的市场价格。在经济中有很多独立存在的风险源，这些风险的市场价格隐含在各种证券的市场价格中，如果我们能够通过知道投资者对这些风险的态度，来确定风险价格，我们做到的不仅仅是确定了一个资产的价格，而是很多资产的价格。对风险价格的不同看法导致了不同的定价模型，如利率不确定变化的 CIR 模型、Ho-Lee 模型、BDT、HJM 模型等。

1.2-4 无套利定价：风险中性定价方法

从资产组合定价方法中可以看到各个状态出现的概率不会影响资产的定价。而期望折现法的难点是怎样确定风险和收益之间的关系。受上述两种方法的启发，我们改变各个状态出现的概率，使风险资产的超额回报率为零，那么单位风险的市场价格为零，资产的回报率都应该是无风险利率。在这个改变了概率的世界里，风险的大小不影响资产的价格和回报率，所有投资者都被看成是风险中性的，他们不关心风险只关心回报，任何资产的回报率都是无风险利率。这种通过改变概率从而对资产进行定价的方法称为风险中性定价方法。

仍以 1.2-1 中的国债欧式期权的定价为例，我们放弃各个状态出现的实际概率，转而寻找一个概率 p ，满足：

$$\frac{pz_{2u} + (1-p)z_{2d}}{1/z_1} = z_2$$

即在新的概率下，债券 z_2 的期望回报率为无风险利率， z_2 今天的价格等于时间 $t = 1$ 的期望价值以无风险利率折现，把数值带入为：

$$\frac{97.799p + 98.039(1-p)}{1 + \frac{0.0399}{2}} = 95.966$$

解出：

$$p = 0.6603$$

在此概率下，证券 z_2 只要求无风险收益率，风险溢价为零，即单位风险的价格为零。由于期权 c 是以证券 z_2 为标的的衍生证券，具有同样的风险源，在此概率下，衍生证券的超额期望回报率也应该为零，期权 c 的现值为：

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{pc_{1u} + (1-p)c_{1d}}{1/z_1} \\ &= \frac{0.6603 \times 0.949 + (1-0.6603) \times 1.189}{1 + \frac{0.0399}{2}} = 1.004 \end{aligned}$$

这与利用资产组合定价方法所得结果完全相同，也说明了这种方法的准确性。其实这种方法可以通过资产组合方法推导出来。

我们给每个状态假定一个新的概率，这个概率不同于经济状态出现的真实概率，这导致了对真实经济状态的偏离，但这种偏离不会影响对证券的评价。在这个想象的经济状态下，单位风险的市场价格为零，所有风险资产只要求无风险的回报，人们也形象地称之为“风险中性世界”，相应的定价方法也称为风险中性定价方法。

1.3 金融资产定价的一般方法：折现因子法

在金融理论中，有很多不同的定价模型，如 CAPM，APT，OPT 等，表面上它们都来自于不同的理论和假设。一般来说，CAPM 是均衡定价模型，APT 和 OPT 是无套利定价模型。其实这些定价模型都可以用一种理论模型统一起来，这就是折现因子模型。折现因子模型要从金融经济学讲起。

1.3-1 折现因子

假定现在所处的时间是 t ，某个资产在将来时间 $t+1$ 的价值是 x_{t+1} ，它现在的价格记为 p_t 。资产定价的核心问题就是要找出 x_{t+1} 和 p_t 的关系。这个资产可以是股票，也可以是债券，也可以是任何其他资产。以股票为例， p_t 是股票今天的价格， x_{t+1} 是股票下一个时间的价格和红利之和。人们的投资行为从根本上取决于人们的跨期消费行为。人们的消费满意程度以他们的效用函数来表示。时间 t 的消费记为 c_t ，时间 $t+1$ 时的消费记为 c_{t+1} ，时间 t 和时间 $t+1$ 总的消费满意程度以如下效用函数表示：

$$u(c_t, c_{t+1}) = u(c_t) + \beta E_t[u(c_{t+1})]$$

其中 β 反映了人们的时间偏好，函数 $u(\cdot)$ 反映了人们的风险厌恶程度。在没有购

买这个价格为 p_t 的资产前, 假定投资者在两个时间的消费分别是 e_t 和 e_{t+1} , 投资者决定是否购买这个资产, 以及购买的数量应该以投资者得到最满意的消费为目标, 即购买资产的份数 ξ 应该满足:

$$\begin{aligned} & \max_{\xi} u(c_t) + \beta E_t[u(c_{t+1})] \\ & s.t. \\ & c_t = e_t - p_t \xi \\ & c_{t+1} = e_{t+1} + x_{t+1} \xi \end{aligned} \quad (1.1)$$

这是一个线性约束优化问题, 其一阶条件为:

$$p_t u'(c_t) = E_t[\beta u'(c_{t+1})] \quad (1.2)$$

或

$$p_t = E_t\left[\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} x_{t+1}\right] \quad (1.3)$$

(1.2)式可以以经济学的边际消费概念解释, 左边是 t 时刻购买单位资产导致的消费效用的减少, 右边是时刻 $t+1$ 效用的增加量的期望值折现到时间 t 。最优的消费和投资量应该使两个时间点的边际效用相等。(1.2)式两边除以 $u'(c_t)$ 就变成了(1.3)式。

如果记:

$$m_{t+1} = \beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}$$

(1.3)式可以写成:

$$p_t = E_t(m_{t+1} x_{t+1}) \quad (1.4)$$

m_{t+1} 在(1.4)式中相当于通常讲的折现因子。它首先把时间 $t+1$ 时刻的现金流 x_{t+1} 折现, 然后再取期望值。如果现实中没有不确定性, m_{t+1} , x_{t+1} 都是常数, 那么 m_{t+1} 就等于 $1/(1+R_{t+1,t})$, 其中 $R_{t+1,t}$ 是 t 到 $t+1$ 时刻的无风险利率。因此我们也把 m_{t+1} 称为折现因子。

有时我们对资产的收益率更感兴趣, 资产的毛收益率记为 $1+R_{t+1}$, 它与价格的关系为:

$$1+R_{t+1} = \frac{x_{t+1}}{p_t}$$

由(1.4)式, 资产的收益率满足方程:

$$1 = E_t[m_{t+1}(1+R_{t+1})] \quad (1.5)$$

如果一个资产的收益在 $t+1$ 时刻是无风险的, 比如, 在时间 $t+1$ 到期的国债, 则其价格一定等于面值, 收益率为无风险利率 $R_{H/F}$, 是一个常数, 把它代入(1.5)

式, 得到:

$$1 - E_t[m_{t+1}(1 + R_{t+1})] = (1 + R_{t+1,f})E_t(m_{t+1}) \quad (1.6)$$

其中,

$$R_{t+1,f} = 1/E_t(m_{t+1}) - 1$$

有了(1.6)式, (1.5)式可以变形, 得到我们想要的形式:

$$\begin{aligned} 1 &= E_t(m_{t+1})E_t(1 + R_{t+1}) + \text{cov}_t(m_{t+1}, R_{t+1}) \\ &= E_t(1 + R_{t+1})/(1 - R_{t+1,f}) + \text{cov}_t(m_{t+1}, R_{t+1}) \end{aligned}$$

整理后得:

$$E_t(R_{t+1}) - R_{t+1,f} = -(1 + R_{t+1,f})\text{cov}_t(m_{t+1}, R_{t+1}) \quad (1.7)$$

或者

$$E_t(R_{t+1}) - R_{t+1,f} = -\frac{\text{cov}_t[u'(c_{t+1}), R_{t+1}]}{u'(c_t)} \quad (1.8)$$

(1.7)式可以解释为: 资产的超额回报率由它和折现因子的协方差决定, 协方差越大, 超额回报越高。(1.8)式可以解释为: 所有资产的期望回报率都等于无风险利率加上一个风险金, 对那些收益率与边际效用负相关的资产, 投资者并不喜欢(因为边际效用增加时, 人们希望增加消费, 而这种资产在这个时候的收益却很低), 投资者要求更高的回报率; 那些收益率与边际效用正相关的资产, 是投资者喜欢的资产(因为边际效用增加时, 人们需要增加消费, 而这种资产在这个时候的收益也高), 投资者要求较低的收益率。

(1.4)式、(1.5)式或(1.7)式是资产定价理论的基本模型。不同的定价模型差别在于对折现因子的不同假定。

可以证明, 在无套利的证券市场上, 存在正的折现因子 m_{t+1} , 使得任何资产的回报率都满足(1.5)式, 在完全的(complete)资本市场上, 这个折现因子还是唯一的(详见 John Cochrane, 2001, pp. 63—77)。

1.3-2 折现因子的应用

利率模型是研究固定收益证券的关键。Vasicek 模型是早期的典型的利率模型。Vasicek 利率模型可以通过对折现因子的假定导出。

假定经济状态的变化可以以一个变量 z_t 描述, 其变化服从一阶自回归过程(AR(1))

$$z_{t+1} = \varphi z_t + (1 - \varphi)\theta + \sigma \epsilon_{t+1} \quad (1.9)$$

其中 $\{\epsilon_{t+1}\}$ 是相互独立的, 服从标准正态分布的时间序列随机变量。由时间序列分析有关结果知道, z_t 的条件期望值是:

$$E_t(z_{t+1}) = \varphi z_t + (1 - \varphi)\theta$$

期望值是：

$$E(z_{t+1}) = \theta$$

条件方差是：

$$\text{var}_t(z_{t+1}) = \sigma^2$$

方差是：

$$\text{var}(z_{t+1}) = \sigma^2 / (1 - \varphi^2)$$

如果 $\varphi = 1$, (1.9)式是一个随机走动; $\varphi < 1$ 时,(1.9)式是一个均值回复过程。

折现因子来自于消费函数,因此它的取值应由经济状态变量确定,假定其变化可以描述为:

$$-\ln m_{t+1} = \delta + z_t + \lambda \epsilon_{t+1} \quad (1.10)$$

其中 $-\ln(\cdot)$ 是自然对数函数。从时间 t 看,折现因子服从对数正态分布,其条件数学期望为:

$$E_t(m_{t+1}) = \exp\left(\delta + z_t + \frac{1}{2}\lambda^2\right)$$

假定一个债券在时间 $t+1$ 到期,到期的价值是 1,时间 t 的价格为 $p_t^{(1)}$,从时间 t 看,它是一个无风险债券,其收益率即是时间 t 的短期利率,连续复利形式短期利率 r_t 与价格 $p_t^{(1)}$ 的关系为:

$$r_t = -\ln p_t^{(1)}$$

根据定价方程(1.4),价格 $p_t^{(1)}$ 满足方程:

$$p_t^{(1)} = E_t(m_{t+1}) = \exp\left(\delta + z_t + \frac{1}{2}\lambda^2\right)$$

因此短期利率与折现因子有关系:

$$\begin{aligned} r_t &= -\ln p_t^{(1)} \\ &= \delta + z_t + \frac{1}{2}\lambda^2 \end{aligned}$$

只要使 δ 的取值等于 $-\frac{1}{2}\lambda^2$,就有:

$$r_t = z_t$$

这样就导出了短期利率的 Vasicek 形式:

$$r_{t+1} = \varphi r_t + (1 - \varphi)\theta + \sigma \epsilon_{t+1} \quad (1.11)$$

由于短期利率等于经济状态变量,短期利率也就是决定了各种到期日的利率。在现代金融理论中,长短期利率的差别由长期利率的风险决定,在本节的假定下,风险的风险金取决于折现因子中的参数 λ 。因此折现因子不仅导出了 Vasicek 模型,还给出了风险金参数 λ 。

进一步还可以求出长期利率的表达式。实际上, n 年期利率 $y_t^{(n)}$ 是 n 年后到期的面值为 1 的不付息债券的收益率, 假定这个 n 年后到期的债券的价格是 $p_t^{(n)}$, 可以证明它们和短期利率的关系为:

$$-\ln p_t^{(n)} = A_n + B_n r_t \quad (1.12)$$

$$y_t^{(n)} = \frac{1}{n} (A_n + B_n r_t) \quad (1.13)$$

其中 A_n 和 B_n 只与到期日 n 有关, 与短期利率 r_t 无关。 $n=1$ 时, 显然有:

$$A_1 = 0 \quad B_1 = 1$$

由(1.10)式和(1.12)式得:

$$\begin{aligned} \ln(m_{t+1} p_{t+1}^{(n)}) &= \ln m_{t+1} + \ln p_{t+1}^{(n)} \\ &= -\delta - z_t - \lambda \epsilon_{t+1} - A_n - B_n z_{t+1} \\ &= -[A_n + \delta + B_n(1 - \varphi)\theta] - (1 + B_n \varphi)z_t - (\lambda + B_n \sigma) \epsilon_{t+1} \\ E_t[\ln(m_{t+1} p_{t+1}^{(n)})] &= -[A_n + \delta + B_n(1 - \varphi)\theta] - (1 + B_n \varphi)z_t \\ \text{var}_t[\ln(m_{t+1} p_{t+1}^{(n)})] &= (\lambda + B_n \sigma)^2 \end{aligned}$$

再由(1.12)式得:

$$\begin{aligned} A_{n+1} + B_{n+1} r_t &= -\ln p_t^{(n+1)} \\ &= A_n + \delta + B_n(1 - \varphi)\theta - (\lambda + B_n \varphi)r_t - \frac{1}{2}(\lambda + B_n \sigma)^2/2 \end{aligned}$$

最后得到递推关系式:

$$A_{n+1} = A_n + \delta + B_n(1 - \varphi)\theta - (\lambda + B_n \sigma)^2/2 \quad (1.14)$$

$$B_{n+1} = 1 + B_n \varphi \quad (1.15)$$

在 Vasicek 模型中, 有 4 个参数: θ , φ , σ^2 , λ , 需要根据实际中观测到的利率取值进行估计。 θ 是短期利率的数学期望, 可以用短期利率的样本均值估计它; φ 是短期利率的一阶自相关系数, 可以用短期利率的二阶自相关系数估计它; 然后用短期利率的样本方差估计 $\sigma^2/(1 - \varphi)$, 因为 φ 已经估计出, σ^2 的估计值就可以得到; λ 决定了长短期利率差别, 也就是决定了长期利率的取值。由(1.13)式得:

$$E(y_t^{(n)}) = \frac{1}{n} (A_n + B_n \theta)$$

可以根据 n 年期利率的样本平均值估计 λ 的取值, 但稍微复杂一点。

1.4 二叉树模型

二叉树模型容易解释, 易于实现, 在教学中和企业界得到了广泛应用, 成为金

融工程的基本方法。它是一种离散时间、离散状态模型，经济状态的每一次变化，只有两种可能：“上升”和“下降”。我们仍以利率为例，说明二叉树模型。

仍以 Vasicek 模型为例，短期利率的变化为：

$$r_{t+1} = r_t + \alpha + \sigma \epsilon_{t+1} \quad (1.16)$$

现在 ϵ_t 不再是一个正态随机变量，而是一个只取两个值的随机变量，但它的条件期望值要为 0，可以假定：

$$\epsilon_{t+1} = \begin{cases} 2(1-\pi) & \text{概率为 } \pi \\ -2\pi & \text{概率为 } 1-\pi \end{cases} \quad (1.17)$$

显然，

$$E(\epsilon_{t+1}) = 0$$

$$\text{var}(r_{t+1}) = 4\pi(1-\pi)$$

在大部分情况下，可直接假定 $\pi = \frac{1}{2}$ ，这时

$$\epsilon_{t+1} = \begin{cases} 1 & \text{概率为 } 0.5 \\ -1 & \text{概率为 } 0.5 \end{cases}$$

则

$$E(\epsilon_{t+1}) = 0$$

$$\text{var}(r_{t+1}) = 1$$

在(1.16)式和(1.17)式的假定下，短期利率的条件期望和方差为：

$$E_t(r_{t+1}) = r_t + \alpha$$

$$\text{var}_t(r_{t+1}) = 4\sigma^2\pi(1-\pi)$$

短期利率 r_{t+1} 的变化用二叉树表示为：

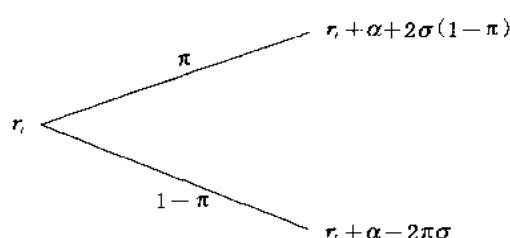


图 1.2 短期利率变化的二叉树

由于经济状态变化只有两个取值，折现因子的变化也是一样，假定在时间 t 的取值为 m_t ，在下一个时间 $t+1$ 以概率 π 取值 m_u ，以概率 $1-\pi$ 取值 m_d 。由 1.3 节关于折现因子的讨论，任何资产的现价 p_t 和下一个时间 $t+1$ 的价格 p_u 、 p_d 满足

关系：

$$\begin{aligned} p_t &= E_t(m_{t+1}p_{t+1}) \\ &= \pi m_u p_u + (1 - \pi) m_d p_d \end{aligned} \quad (1.18)$$

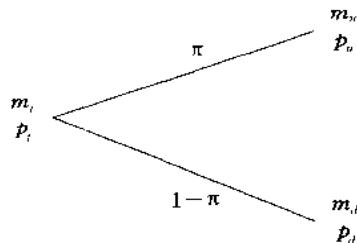


图 1.3 资产价格和折现因子变化的二叉树

特别地，对于一个时间 $t+1$ 到期的面值为 1 的不付息债券，其收益率一定为无风险利率 r_t ，现价一定为 $\exp(-r_t)$ 。对这个债券应用(1.18)式，得到：

$$\begin{aligned} \exp(-r_t) &= E_t(m_{t+1}p_{t+1}) \\ &= \pi m_u + (1 - \pi) m_d \\ 1 &= \exp(r_t) E_t(m_{t+1}p_{t+1}) \\ &= \exp(r_t) \pi m_u + \exp(r_t) (1 - \pi) m_d \end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned} q_t &= \exp(r_t) \pi m_u \\ 1 - q_t &= \exp(r_t) (1 - \pi) m_d \end{aligned}$$

于是(1.18)式可以改写为：

$$\begin{aligned} p_t &= E_t(m_{t+1}p_{t+1}) \\ &= \exp(-r_t)[q_t p_u + (1 - q_t) p_d] \end{aligned} \quad (1.19)$$

(1.19)式可以这样来理解：任何资产的价格等于其下一个时间的价值在概率 q_t ， $1 - q_t$ 下的期望值以无风险利率折现到现在。由于在概率 q_t ， $1 - q_t$ 下，任何资产的价格都可以通过未来期望值用无风险利率折现，资产的风险不再反映到期望收益率上，任何资产的期望收益率都是无风险利率，投资者对风险的态度是中性的，不厌恶也不喜欢，因此 q_t ， $1 - q_t$ 也称为风险中性概率。 q_t ， $1 - q_t$ 是人为构造的概率，是现实世界不存在的概率，在这个人为构造的概率下，投资者就变成了风险中性的投资者。推导过程也就说明了只要折现因子存在，风险中性概率也就存在。这同时也说明了前面 1.2-4 节提到的风险中性定价方法的合理性。在风险中性下，利率、资产价格变化的二叉树为：

上面说的是在折现因子存在的情况下，可以导出风险中性概率，反过来，假定知道了风险中性概率 q_t ， $1 - q_t$ ，也可以找出折现因子，在二叉树模型下，折现因子

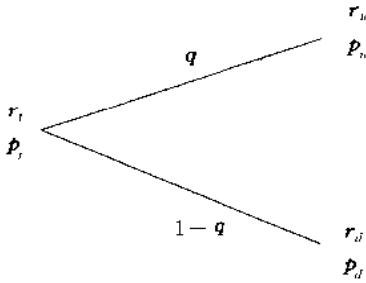


图 1.4 风险中性下, 利率和资产价格变化的二叉树

应为：

$$-\ln m_{t+1} = \delta + r_t + \lambda \varepsilon_{t+1} \quad (1.20)$$

其中，

$$\delta = \pi \ln(\pi/q) + (1 - \pi)/(1 - q)$$

$$2\lambda = \ln(\pi/q) - \ln[(1 - \pi)/(1 - q)]$$

请读者自己验证。这至少说明了，在二叉树模型下，风险中性方法和折现因子法是完全一致的。

本章小结

本章首先介绍了三类基本衍生证券：远期、期权和互换，指出任何复杂证券都可以看成是普通证券和基本衍生证券的组合。然后对本书用到的资产定价方法进行了讨论，重要定价方法包括资产组合方法、风险中性定价方法、折现因子法。最后讨论了本书使用的最基本的模型：二叉树模型，并在二叉树模型下探讨了折现因子和风险中性概率的关系。重要概念包括：

(1) 远期合约：买卖双方签订的一份合约，它规定在将来某个时间以一定价格交割某项资产。

(2) 期权：一份合约，它赋予合约的一方，即期权的购买者，在指定的时间内，以事先确定的价格购买（或出售）一定数量的某种商品的权利。

(3) 利率互换：买卖双方签订的一个合约，规定在一定时间里，双方定期交换以一个名义本金作基础，用不同利率计算出的现金流。

(4) 货币互换：双方签订的一个合约，规定在一定时间里，双方定期交换以一个名义本金作基础，但用不同币种和利率计算出的现金流。

(5) 套利：简单来讲就是同时持有一种或多种资产的多头或空头，从而在不承担风险的情况下锁定一个高于无风险利率的收益。如果这样的机会存在的话，就称之为套利机会。常用的套利方法有两种：

① 现在进行净支出为零的一系列投资，在将来不会出现负的收益，而且有可

能出现正的收益：

② 现在进行一系列能带来正收益的交易，这些交易不会使未来产生任何支付。

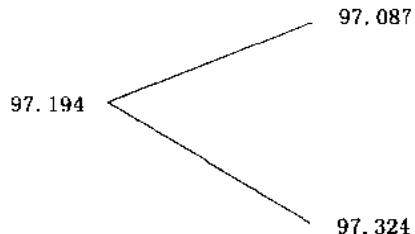
(6) 折现因子：在无套利的证券市场上，存在正的折现因子 m_{t+1} ，使得任何资产的价格 p_t 与其下一个时间的价值 x_{t+1} 之间满足：

$$p_t = E_t(m_{t+1}x_{t+1})$$

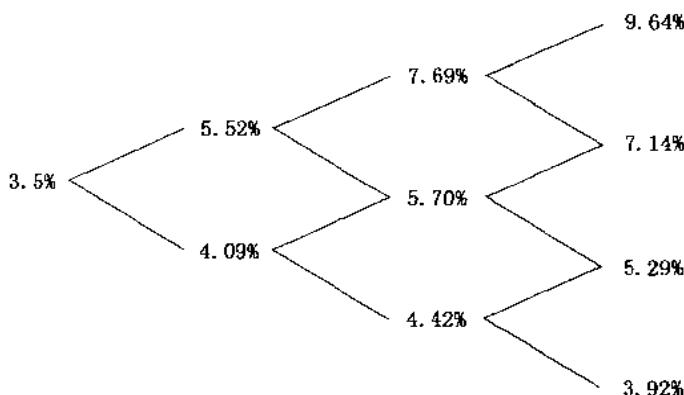
在完全的(complete)资本市场上，这个折现因子还是惟一的。

复习与思考

- 假定面值为 100, 1 年后到期的不付息债券的现价为 97.194，其在半年后的价格有两种可能的取值，分别是 97.087 和 97.324，假定当前的半年期利率为 5%（半年复利一次的年利率），计算利率变化的风险中性概率。



- 浮动利率债券的利息随市场利率变化而变化。假定一个浮动利率债券为：记 1 年期市场利率为 r ，如果利率 r 不超过 7%，且不低于 4%，则年末债券的利息为 $100r$ ；如果市场利率 r 高于 7%，年末利息为 7；如果市场利率 r 低于 4%，年末利息为 4。这个浮动利率债券的本金为 100, 4 年后到期。假定市场上 1 年期利率的变化如下图所示，且风险中性概率都是 $1/2$ 。计算这个债券的价值。



参考文献

- Black F. and Scholes M., 1973, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, 81, 637—654.
- Bruce Tuckman, 1996, *Fixed Income Securities*, John Wiley & Sons, Inc..
- Fred D. Arditti, 1996, *Derivatives*, Harvard Business School Press.
- Hans R. Stoll and Robert E. Whaley, 1993, *Futures and Options*, South-Western Publishing Co. .
- John C. Hull, 2001,《期权、期货和其他衍生品》(第4版,英文影印版),清华大学出版社。
- John Cochrane, 2001, *Asset Pricing*, Princeton University Press.
- John Cox, 1999, *Investment Banking*, MIT Transparency.
- John O'Brien and Sanjay Srivastava, 1995, *Investments-A Visual Approach*, South-Western College Publishing.
- Keith Brown and Donald Smith, 1995, *Interest Rate and Currency Swaps*, The Research Foundation of The Institute of Chartered Financial Analysis.
- Oliver Grandville, 2001, *Bond Pricing and Portfolio Analysis*, The MIT Press.
- Suresh M. Sundaresan, 1997, *Fixed Income Markets and Their Derivatives*, South-Western College Publishing.
- 宋逢明,1999,《金融工程原理——无套利均衡分析》,清华大学出版社。
- 吴信如、潘英丽,2000,《金融工程学》,立信会计出版社。
- [美]约翰·马歇尔·维普尔·班塞尔,1998,《金融工程》,宋逢明、朱宝宪、张陶伟译,清华大学出版社。
- [英]洛伦兹·格利茨,1998,《金融工程学》,唐旭等译,经济科学出版社。

第 1 篇

固定收益 债券

在

1980 年以前,对固定收益债券的分析相当简单。那时利率相对稳定,投资者购买债券倾向于持有至到期日,风险主要体现在信用风险上,到期收益率是度量债券价值最重要的一个指标。对于较复杂的债券,如可赎回债券,人们简单地用赎回时的收益率来度量它的价值。但是在今天的经济环境下,利率的波动幅度很大,利率的期限结构变化很快,使得传统的分析方法不再适合今天的需要,这主要体现在如下三个方面:

(1) 投资者往往在债券到期日前出售所持有的债券,这样到期收益率就不能度量债券持有者的收益,同时债券价格随利率变化而变化,债券的价格变化风险必须要有合适的方式度量。

(2) 中长期债券一般在到期前支付利息,只有债券到期前得到的利息的再投资收益率等于债券的到期收益率,债券到期收益率才能够真实地度量债券持有者的收益。由于利率的不确定性变化,再投资利率很难等于债券到期收益率。由利率下降导致投资者实际收益的减少在利率多变的情况下是很难忽略的。

(3) 出现了一些复杂证券,这些债券都有一定的期权特征,传统的方法不能满足它们的价值评价和风险度量。

上述状况推动了固定收益债券评价理论的快速发展。虽然久期这个概念在 1938 年就由弗雷德里克·麦考利(Frederick Macaulay)提出,但直到 1973 年,霍普韦尔(M. Hopewell)和考夫曼(G. Kaufman)才第一次把久期和债券价格波动联系起来。之后斯坦利·迪勒(Stanley Diller)对固定收益债券评价作出了重要贡献,首先他在 1984 年指出,收益率和久期还不足以描述固定收益债券的价格和收益变化,还必须引进另外一个风险度量概念:凸度;其次他把期权定价理论与固定收益债券联系起来,描述了嵌入期权对固定收益债券的价格和风险的影响。固定收益债券的评价还推动了利率模型的发展,固定收益债券的价值和风险取决于利率的期限结构和其变化,如果利率模型能完整描述利率的变化特征,根据这个利率模型也就能够合理地评价固定收益债券的价值和风险。本书介绍的 CIR 模型、Ho-Lee 模型等是一些比较典型的利率模型。

本篇将介绍固定收益债券、利率期限结构、利率模型、固定收益债券的价值和风险评价方法,以及固定收益债券的设计、投资及风险管理问题。

债券的基本概念

2.1 国债的价格与收益率

认识国债是研究固定收益债券市场的基础。国债可以划分成两大类：短期国债和中长期国债。短期国债是指从发行日到到期日不超过一年的国债。美国政府发行的短期国债有三个月期、半年期和一年期三种。中长期国债是指一年以上期的国债。中长期国债一般在到期日之前支付利息，按照美国资本市场的传统，利息半年支付一次，但息票率以年息票率记。例如，某种债券的年息票率是10%，面值是100，则每年共付息10，半年一次，一次支付5。由于短期国债属于货币市场，一般认为没有风险，其报价方式也采用货币市场的报价传统。而中长期债券由于到期日较长，有利率风险，属于资本市场中的金融产品，采取的是资本市场报价方式。

不同的债券在日期的计算方式上有所不同，市场上有6种日期计算方式：

- (1) 实际天数/实际天数；
- (2) 实际天数/365；
- (3) 实际天数/365(闰年时366天)；
- (4) 实际天数/360；
- (5) 30/360；
- (6) 30E/360。

其中前一个天数代表一个月按多少天算，后一个天数代表一年算多少天。下面对后两种日期计算方式作一下解释：

(1) 如果前后两个时间点分别是 $D_1/M_1/Y_1$ 和 $D_2/M_2/Y_2$ ，其中 D_i 代表日， M_i 代表月， Y_i 代表年($i=1,2$)，按第5种计算方式(30/360)计算：

如果代表日的 D_1 是31，把它改成30；

如果代表日的 D_2 是31，而同样代表日的 D_1 是30或31，则把 D_2 改成30；其他情况下， D_2 不变。

两个时间点的时间间隔计算公式为(以日为单位)：

$$(Y_2 - Y_1) \times 360 + (M_2 - M_1) \times 30 + (D_2 - D_1) \quad (2.1)$$

(2) 如果按第 6 种计算方式计算日期:

如果 D_1 是 31, 把它改成 30;

如果 D_2 是 31, 把它改成 30。

日期计算公式为:

$$(Y_2 - Y_1) \times 360 + (M_2 - M_1) \times 30 + (D_2 - D_1) \quad (2.2)$$

在美国资本市场上,有多种类型的债券,比较典型的有美国联邦政府债券、市政债券和公司债券等。联邦政府中长期债券采取第 1 种日期计算方式。假定一个联邦政府债券在每年的 3 月 1 日和 9 月 1 日付息,如果你在 7 月 17 日购买了该债券,离下一次付息日的天数应为:

$$14(\text{从 7 月 17 日到 7 月 31 日}) + 31(\text{整个 8 月份}) + 1(\text{9 月 1 日}) = 46(\text{天})$$

因此,46 天是计算购买日累积利息的依据。与联邦债券不同,公司债券和市政债券采取第 5 种日期计算方式。假定一个公司债券在每年的 3 月 1 日和 9 月 1 日付息,如果你在 7 月 17 日购买了该债券,离下一次付息日的天数应为:

$$13(\text{从 7 月 17 日到 7 月 31 日}) + 30(\text{整个 8 月份}) + 1(\text{9 月 1 日}) = 44(\text{天})$$

下面分别介绍美国债券市场上的短期国债和中长期国债。

2.1-1 中长期国债

中长期债券是指发行日至到期日超过一年的债券,其日期计算采用第 1 种方式,由于半年付息一次,到期收益率一般以半年复利一次的名义年收益率记。到期收益率的计算公式为:

$$\bar{P} + A = \sum_{k=1}^N \frac{c/2}{(1+y/2)^{k-1+x}} + \frac{1}{(1+y/2)^{N-1+x}} \quad (2.3)$$

其中:

y : 到期收益率;

c : 年息票率;

\bar{P} : 1 单位面值的报价;

x : 现在离下一个付息日的天数/两次付息日之间的间隔天数;

A : 每单位面值的累积利息,也就是 $(1-x) \times \frac{c}{2}$;

N : 债券到期前的利息支付次数。

我国目前交易所交易的债券,报价给出的是全部价格,不仅包括平价(flat price or clean price) \bar{P} ,而且还包括累积利息。这种报价有一个弊端,在付息日,价格会突然下降,下降的幅度大约等于当天的利息支付。在美国市场上,报价只包括平价,但交割时,要加上累积利息。平价的变化主要反映资金供求的变化和利率的变化。

例 2.1 国债的息票率为 10%, 面值为 1 000, 在 2003 年 6 月 1 日到期, 假定

在 2002 年 3 月 1 日购买了该国债,其到期收益率为 6.5%,该债券的全价和报价各为多少?

可以算出累计利息:

$$A = 1000 \times (1 - x) \times \frac{c}{2} = 25$$

债券的价值是 1066.2 , 报价为 $1066.2 - 25 = 1041.2$ 。

2.1-2 短期国债

短期国债是指发行日至到期日不超过一年的债券,日期计算采用第 4 种计算方式,收益率报价采用的是半年复利一次的名义年折现率(nominal discount rate)。折现率与价格关系为:

$$P = 1 - D \times \frac{T}{360} \quad (2.4)$$

其中:

P : 单位面值的现价;

D : 折现率;

T : 现在离到期日的天数。

由于下面要计算利率的期限结构,需要把折现率换算成到期收益率(半年复利一次),换算方法因到期日长短不同而不同。

(1) 如果现在离到期日不到 6 个月时间,一般采取下式计算:

$$(1 + yT/365)^{-1} = 1 - D \frac{T}{360} \quad (2.5)$$

026

金融工程学

$$y = \frac{D \frac{365}{360}}{1 - D \frac{T}{360}} \quad (2.6)$$

(2) 如果国债现在离到期日超过 6 个月,采取的计算方法为:

$$P \left(1 + \frac{y}{2}\right) \left[1 + y \left(\frac{T}{365} - \frac{1}{2}\right)\right] = 1 \quad (2.7)$$

$$y = \frac{-\frac{T}{365} + \sqrt{\left(\frac{T}{365}\right)^2 - 2\left(\frac{T}{365} - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{P}\right)}}{\left(\frac{T}{365} - \frac{1}{2}\right)} \quad (2.8)$$

可以看出一个短期债券的折现率比收益率要小。表 2.1 是收益率和折现率的比较。

表 2.1 短期国债收益率和折现率的比较

折现率(%)	收益率(%)	
	30 天后到期	182 天后到期
4.00	4.07	4.14
8.00	8.17	8.45
12.00	12.29	12.95
16.00	16.44	17.65

2.2 不付息债券和利率的期限结构

有了国债的市场价格,可以通过资产组合方法和套利定价理论,求出不付息债券的市场价格,这些不付息债券的价格或它们的收益率被称作利率的期限结构。下面以一个例子说明利率的期限结构的构造方法。

假定有 5 个债券,面值都是 100,半年付息一次,价格、息票率、到期日如表 2.2 所示。

表 2.2 5 个国债的收益率、到期日、息票率、价格

国 债	息票率(%)	到期日(年)	收益率(%)	价格
B_1	7	0.5	7.0	100
B_2	8	1	8.00	100
B_3	10	1.5	8.5	102.071
B_4	8.8	2	8.8	100
B_5	10	2	?	?

为了计算方便,将这些债券的现金流在表 2.3 中列出。

表 2.3 5 个国债的现金流

债 券	时间(年)	0.5	1	1.5	2
		103.5	104	105	104.4
B_1		103.5			
B_2		4	104		
B_3		5	5	105	
B_4		4.4	4.4	4.4	104.4
B_5		5	5	5	105

下面构造 4 个不付息债券 Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 , 它们分别在 0.5, 1, 1.5, 2(单位为年)到期,到期日的现金流为 1。现金流表如表 2.4 所示。

从现金流的匹配来看,103.5 份 Z_1 与 B_1 具有相同的现金流,它们也应具有相同的现价,因此, Z_1 的现价为:

表 2.4 要构造的 4 个不付息债券的现金流

不付息债券	不付息债券的现金流			
	0.5	1	1.5	2
Z_1	1			
Z_2		1		
Z_3			1	
Z_4				1

$$Z_1 = \frac{1}{103.5} B_1 = 0.9662$$

同样从现金流的匹配来看, B_2 与一个 4 份 Z_1 和 104 份 Z_2 这样一个资产组合带来的现金流相同, B_2 的现价应等于这个资产组合的现价, 即:

$$B_2 = 4Z_1 + 104Z_2$$

$$Z_2 = \frac{1}{104} (B_2 - 4Z_1) = \frac{1}{104} (100 - 4 \times 0.9662) = 0.9244$$

同样的道理可以分别计算出 Z_3 和 Z_4 的价格, 计算结果为:

$$Z_3 = \frac{1}{105} (B_3 - 5Z_1 - 5Z_2) = 0.8821$$

$$Z_4 = \frac{1}{104.4} (B_4 - 4.4Z_1 - 4.4Z_2 - 4.4Z_3) = 0.8414$$

还可以通过这些不付息债券的价格计算出它们的收益率, 计算公式为:

$$Z_t = \left(1 + \frac{y_t}{2}\right)^{-t} \quad (2.9)$$

028

金融工程学

计算出的收益率是半年复利一次的收益率, 它们分别是:

$$y^{(1)} = 7.00\%, y^{(2)} = 8.00\%, y^{(3)} = 8.5\%, y^{(4)} = 8.8\%$$

利率的期限结构可以用 (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) 表示, 也可以等价地用 $(y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}, y^{(4)})$ 表示。

2.3 债券的定价与设计

知道了利率的期限结构, 就可以定价或设计普通债券(这里所说的普通债券, 相当于 straight bond, 即现金流是事先完全确定的)。首先看定价问题。知道了利率的期限结构, 即知道了 Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 的价格, 就可以对债券 B_5 进行定价。由于债券 B_5 带来的现金流相当于资产组合 $5Z_1, 5Z_2, 5Z_3, 105Z_4$ 带来的现金流, 其现价也相同;

$$B_5 = 5Z_1 + 5Z_2 + 5Z_3 + 105Z_4 = 102.2105$$

而 B_5 的收益率是：

$$\sum_{i=1}^4 5 \left(1 + \frac{y}{2}\right)^i + 105 \left(1 + \frac{y}{2}\right)^4 = 102.2105$$

$$y = 8.8\%$$

现在再来看如何利用利率的期限结构设计一个普通债券。就拿一个平价债券 (par bond) 为例。所谓平价债券，是指收益率等于息票率的债券。平价债券的价格与它的面值并不一定相等。在付息日，价格等于面值，而在非付息日，价格稍低于面值。这可以通过下面一个具体例子看出。

例 2.2 假定一个平价债券的面值是 100，息票率是 9%，到期前还有 4 次现金流支付，现在离下一个付息日有 x 半年，可以在 x 的不同取值下计算出报价和累积利息，计算结果如表 2.5 所示。

表 2.5 在不同时间点债券的价值、报价和累积利息

	$x = 1$	$x = 3/4$	$x = 1/2$	$x = 1/4$	$x = 0$
$\bar{P} + A$	100	101.1065	102.2252	103.3564	104.5
\bar{P}	100	99.9815	99.9752	99.9814	100
A	0	1.125	2.25	3.375	4.5

注：由于这是一个平价债券，收益率等于息票率 9%，由收益率和价格的关系可以计算出债券的价值 $\bar{P} + A$ ，然后再计算出累计利息，累计利息利用公式 $A = (1-x) \times \frac{C}{2} \times 100$ 计算，价格和累计利息相减即是债券的报价 \bar{P} 。

现在就来利用构造出的利率期限结构设计一系列平价国债。半年后、一年后、一年半后、两年后到期的平价国债的息票率分别满足以下等式

$$100 = \left(100 + 100 \frac{C_1}{2}\right) Z_1$$

$$100 = 100 \frac{C_2}{2} Z_1 + \left(100 + 100 \frac{C_2}{2}\right) Z_2$$

$$100 = 100 \frac{C_3}{2} Z_1 + 100 \frac{C_3}{2} Z_2 + \left(100 + 100 \frac{C_3}{2}\right) Z_3$$

$$100 = 100 \frac{C_4}{2} Z_1 + 100 \frac{C_4}{2} Z_2 + 100 \frac{C_4}{2} Z_3 + \left(100 + 100 \frac{C_4}{2}\right) Z_4$$

可以推导出 C_j ($j = 1, 2, 3, 4$) 的计算公式为：

$$\frac{C_j}{2} = \frac{1 - Z_j}{\sum_{i=1}^j Z_i} \quad (2.10)$$

计算出 C_j 的取值为：

$$C_1 = 7.00\%, C_2 = 7.995\%, C_3 = 8.506\%, C_4 = 8.776\%$$

2.4 远期价格与远期利率

远期合约是指两方签订一个合约，同意在将来某一时间按一定的价格交割一定数量的资产。交割时间称为远期合约的到期日，交割的资产称为标的资产。远期合约在签订之日对双方都应该是公平的，因此远期合约的交割价格在签订之日应该使远期合约的价值为零。使远期合约的价值为零的交割价格称为远期价格。在远期合约签订之后，交割价格不再变动，由于标的资产价格的不确定性，远期合约的价值可能不再为零，这个在签订之日确定的交割价格也就不再等于后来的远期价格。

债券的远期合约是资本市场上常见的金融产品，如果债券在远期合约到期前不付息，远期合约价格的计算公式为：

$$\text{远期价格} = \text{标的资产现在的价格} / \text{在交割日到期的不付息债券的现价}$$

例 2.3 假定远期合约的标的资产是两年后到期的不付息债券 Z_4 ，在一年后交割，远期价格为：

$$\begin{aligned} F &= Z_4/Z_2 \\ &= \frac{0.8414}{0.9244} \\ &= 0.9102 \end{aligned}$$

为什么远期价格一定是 0.9102，而不会是另外一个数呢？不妨假定是 0.915。如果价格是 0.915，就可以通过适当的交易，在市场上套利。套利思想是很简单的，那就是贵卖贱买。另外为了实现套利的目的，交易可以按照远期合约的远期价格的求解式子进行，即 $-Z_4 + FZ_2 = 0$ ，这里正号（+）代表得到，即现金流入，负号（-）代表付出，即现金流出。套利交易策略如下：

- (1) 卖空一份远期合约；
- (2) 买进一份两年后到期的不付息债券 Z_4 ；
- (3) 卖空 0.915 份 Z_2 ，即借来 0.915 个一年后到期的 Z_2 将其卖掉。

这笔交易现在带来现金流：

$$-Z_4 + 0.915Z_2 = 0.000011$$

一年后：

- (1) 履行远期合约，从买方收到现金 0.915；
- (2) 归还卖空的 0.915 份 Z_2 ，由于 Z_2 一年后到期，到期的价格是 1，0.915 份 Z_2 花掉 0.915 元钱。

这些交易现在得到了正的现金流，而在一年后不需要任何付出。这是一个典

型的套利机会,套利机会产生于远期合约的不准确的定价。

有了远期合约这个概念,再来理解远期利率。远期利率简单地看就是以这些不付息债券为标的的远期合约从交割到持有标的资产到期的收益率。上面例子中的远期合约在一年后交割,交割后得到一份 Z_4 。假定投资者持有 Z_4 到期,投资者从远期合约得到的现金流如图 2.1 所示。

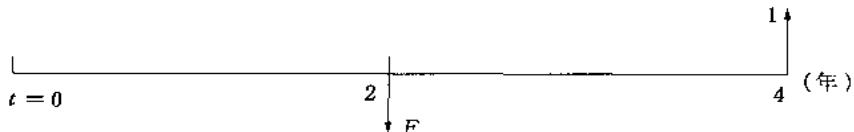


图 2.1 远期合约现金流示意图

远期合约的收益率,就是从一年后得到债券 Z_4 开始,持有债券到债券到期日,这段时间持有债券带来的半年复利一次的收益率,记为 $f_0^{(2 \rightarrow 4)}$, $f_0^{(2 \rightarrow 4)}$ 的下标表示现在的时间是 0,上标(2→4)代表从时间 2 到时间 4 的远期利率,这里的远期利率也是半年复利一次的名义年利率,它满足:

$$F = \frac{1}{\left(1 + \frac{f_0^{(2 \rightarrow 4)}}{2}\right)^2}$$

$$\begin{aligned} f_0^{(2 \rightarrow 4)} &= 2 \times \left(\frac{1}{F} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 9.6330\% \end{aligned}$$

利用这种方法可以计算出从不同时间点开始,在不同时间点到期的远期利率,表 2.6 给出了前面给出的利率期限结构隐含的远期利率。

表 2.6 各种到期日的远期利率(半年复利一次,单位:%)

远期利率的开始时间 (单位:年)	从开始到结束的时间长度(单位:年)			
	0.5	1.0	1.5	2.0
0	7.00	8.02	8.54	8.82
0.5	9.30	9.32	9.43	
1.0	9.60	9.63		
1.5	9.67			

不付息债券的价格和远期利率有以下关系:

$$Z_1 = \frac{1}{1 + \frac{f_0^{(0 \rightarrow 1)}}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{0.07}{2}}$$

$$Z_2 = \frac{1}{\left(1 + \frac{f_0^{(0 \rightarrow 1)}}{2}\right)\left(1 + \frac{f_0^{(1 \rightarrow 2)}}{2}\right)} = \frac{1}{\left(1 + \frac{0.07}{2}\right)\left(1 + \frac{0.09353}{2}\right)}$$

$$\begin{aligned}
 Z_3 &= \frac{1}{\left(1 + \frac{f_0^{(0 \rightarrow 1)}}{2}\right) \left(1 + \frac{f_0^{(1 \rightarrow 2)}}{2}\right) \left(1 + \frac{f_0^{(2 \rightarrow 3)}}{2}\right)} \\
 &= \frac{1}{\left(1 + \frac{0.07}{2}\right) \left(1 + \frac{0.09353}{2}\right) \left(1 + \frac{0.09600}{2}\right)} \\
 Z_4 &= \frac{1}{\left(1 + \frac{f_0^{(0 \rightarrow 1)}}{2}\right) \left(1 + \frac{f_0^{(1 \rightarrow 2)}}{2}\right) \left(1 + \frac{f_0^{(2 \rightarrow 3)}}{2}\right) \left(1 + \frac{f_0^{(3 \rightarrow 4)}}{2}\right)} \\
 &= \frac{1}{\left(1 + \frac{0.07}{2}\right) \left(1 + \frac{0.09353}{2}\right) \left(1 + \frac{0.09600}{2}\right) \left(1 + \frac{0.096658}{2}\right)}
 \end{aligned}$$

对一般付息国债，价格也可以通过远期利率确定。假定一个债券的息票率为 c ，半年付息一次，面值为1，价格与远期利率的关系为：

$$P = \sum_{k=1}^N \frac{c/2}{\prod_{i=1}^k \left(1 + \frac{f_0^{(i-1 \rightarrow i)}}{2}\right)} + \frac{1}{\prod_{i=1}^N \left(1 + \frac{f_0^{(i-1 \rightarrow i)}}{2}\right)} \quad (2.11)$$

现在已经知道价格可以通过两种方法确定，一种是收益率，另一种是远期利率。收益率表达方式更为简便，但不同的债券具有不同的收益率，即使两个债券具有相同的到期日，由于息票率的不同，收益率也很难相同。远期利率是由利率的期限结构决定的，所有债券的价格受共同的远期利率影响，价格的不同仅体现在现金流的不同上。

债券的到期收益率并不是投资者持有债券到期真正得到的收益率，原因来自于利息的再投资风险，只有当债券利息再投资收益率与债券的收益率相同时，投资者持有债券到期实现的收益率才等于债券的到期收益率。但现实中利率是不断变化的，并且是不确定的，再投资收益率很难与债券现在的到期收益率相同。利用远期合约可以锁定债券的收益率，使持有债券实现的收益率不受利率变化的影响。下面通过一个例子来说明。

假定一个债券，两年后到期，息票率是10%，面值是100。债券在到期前有三次利息支付，每次支付5。投资者持有该债券到期，实现的收益率的不确定性来自于这三个利息的再投资收益的不确定性。如果现在就签订三个远期合约，用每次得到的利息购买以两年后到期的不付息债券为标的的远期合约，就可以消除利息再投资的不确定性。可以购买 Z_4 的数量分别是：

$$5 \times (1 + f_0^{(1 \rightarrow 4)})/2)^3 = 5.7605$$

$$5 \times (1 + f_0^{(2 \rightarrow 4)})/2)^2 = \frac{5}{0.9102} = 5.4930$$

$$5 \times (1 + f_0^{(3 \rightarrow 4)})/2) = 5.2358$$

这里的远期利率仍是前面例子中的远期利率。债券与这三个远期合约带来的现金

流在两年后为 121.489 3。该债券的现价经计算为 104.212 1, 计算出债券的到期收益率为 8.02%。债券和三个远期合约的收益率为:

$$\left(1 + \frac{y}{2}\right)^4 = 121.489 3 / 104.21 \\ y = 8.8\%$$

本章小结

本章主要讨论了短期国债、中长期国债的价格、收益率, 不付息债券的价格和利率期限结构, 并讨论了普通债券的定价和设计方法, 国债的远期合约, 远期利率以及远期利率与债券价格、收益率的关系。比较重要的概念和公式有:

(1) 债券价格与收益率的关系:

$$P + A = \sum_{k=1}^N \frac{c/2}{(1+y/2)^{k-1+r}} + \frac{1}{(1+y/2)^{N-1+r}}$$

(2) 短期国债价格与折现率的关系:

$$P = 1 - D \times \frac{T}{360}$$

(3) 利率期限结构可以用一系列不同时间到期的, 面值为 1 的不付息债券的价格 Z_1, Z_2, \dots, Z_n 来表示, 也可以用它们的收益率 $y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)}$ 来表示, 或用远期利率 $f_0^{(0 \rightarrow 1)}, f_0^{(1 \rightarrow 2)}, \dots, f_0^{(n-1 \rightarrow n)}$ 表示。

(4) 平价债券是指收益率等于息票率的债券。在付息日, 平价债券的价格等于面值, 在其他时间, 平价债券的净价稍微小于面值。

(5) 远期利率是指远期合约隐含的收益率。 $f_0^{(n-1 \rightarrow n)}$ 是时间 0 签订的, 在时间 $n-1$ 交割的, 以 n 期后到期的不付息债券为标的资产的远期合约的收益率。

(6) 债券价格与远期利率的关系为:

$$P = \sum_{k=1}^N \frac{c/2}{\prod_{i=1}^K \left(1 + \frac{f_0^{(i-1 \rightarrow i)}}{2}\right)} + \frac{1}{\prod_{i=1}^N \left(1 + \frac{f_0^{(i-1 \rightarrow i)}}{2}\right)}$$

复习与思考

1. 一个国库券, 现在离到期日还有 220 天, 按货币市场的贴现率报价为:

买入价(%)	卖出价(%)
6.02	6.00

根据卖出价,计算债券的收益率。

2. 假定4个债券的面值都是100,息票率、到期日、价格如下表:

息票率(%)	到期日	价格
7.00	0.5	97.80
6.00	1.0	95.55
12.00	1.5	101.20
10.00	2.0	97.50

- (1) 计算这4个债券隐含的到期日分别是0.5、1.0、1.5、2.0年的零息票债券的价格。
- (2) 计算一年期平价债券的息票率。
- (3) 计算6个月后开始的6个月期的远期利率。
3. 根据第2题的有关价格,利用远期利率折现一年期,息票率是4%,面值为100的债券的现金流,并计算出它的价值。
4. 一个公司接受一份政府订单,而公司一年后才开始生产这批产品,生产需要一年才能完成。生产过程需要100万盎司的银作催化剂,生产结束后银完好无损。公司没有库存的银,而且银的市场价格有一定的波动率,公司担心一年后银的价格上涨会导致整个合同无利可图。根据公司的测算,公司希望银的全部使用成本能低于银的当前价格的10%。

银的两种远期合约如下:

到期日(年为单位)	远期价格(元/盎司)
1	5.20
2	5.40

银的当前价格为5元/盎司,而债券的当前价格由习题1给出。请问怎样安排市场交易,才能保证生产的正常进行,同时锁定成本不高于当前银价的10%。

参考文献

- Bruce Tuckman, 1996, *Fixed Income Securities*, John Wiley & Sons, Inc. .
 Hans R. Stoll and Robert E. Whaley, 1993, *Futures and Options*, South-Western Publishing Co. .
 John Cochrane, 2001, *Asset Pricing*, Princeton University Press.
 John Cox, 1999, *Investment Banking*, MIT Transparency.
 Keith Brown and Donald Smith, 1995, *Interest Rate and Currency Swaps*, The Research Foundation of The Institute of Chartered Financial Analysis.

Oliver Grandville, 2001, *Bond Pricing and Portfolio Analysis*, The MIT Press.
Suresh M. Sundaresan, 1997, *Fixed Income Markets and Their Derivatives*,
South-Western College Publishing.

久期和凸度

第

2章介绍了利率的期限结构和普通债券的价值评价和设计,但没有涉及债券的风险及其风险管理问题。本章重点研究普通债券的风险。债券的风险度量中有两个概念占有中心地位,一个是债券的久期,另一个是债券的凸度。本章重点介绍这两个概念及其在风险管理中的应用。

3.1 久期

一个债券的价格取决于它的现金流及当前的利率。由于债券的现金流是事先决定的,利率的波动是债券价格变化的主要风险来源。利率的变化导致人们对债券要求的收益率发生变化,也导致债券价格发生变化。如果以 P 表示债券的价格, y 代表债券的收益率, 债券价格的利率风险可以简单地表示为 $-\frac{\partial P}{\partial y}$, 它表示收益率的单位变化导致价格变化的数量。前面之所以加上负号是因为普通债券的收益率变化与价格变化方向相反。下面通过一个简单例子来说明收益率的变化和债券价格变化的关系。

假定一个 10 年期债券,面值是 100,息票率是 8%,在不同的收益率下,债券的价格如表 3.1 所示。

表 3.1 债券的价格和收益率之间的关系

收益率(%)	4.00	5.00	6.00	7.00	8.00	9.00	10.00	11.00	12.00
价格	132.70	123.38	114.87	107.11	100.00	93.49	87.54	82.57	77.06

由于债券价格对利率变化的敏感性,需要一种方法度量债券价格的利率风险。久期是人们广泛使用的,用来度量债券价格的利率风险的指标。从价格变化和收益率变化之间的关系可以清楚地了解久期这个概念。债券价格的变化和收益率的变化近似有关系:

$$\Delta P \approx \left(\frac{dP}{dy}\right) \Delta y$$

其中 ΔP 代表价格的变化, Δy 代表收益率的变化。等式两边除以价格 P , 得到债券

的价格变化率为：

$$\frac{\Delta P}{P} = \left(\frac{dP}{dy} / P \right) \Delta y \quad (3.1)$$

若以 D 表示久期，则久期定义为：

$$D = - \left(\frac{dP}{dy} / P \right) \quad (3.2)$$

它反映了收益率的单位变化导致价格的变化率。由(3.1)式得：

$$\frac{\Delta P}{P} = - D \Delta y \quad \text{或} \quad \Delta P = - PD \Delta y$$

用文字叙述为：

$$\text{债券的价格变化} = -\text{久期} \times \text{价格} \times \text{收益率的变化}$$

或

$$\text{债券价格变化的百分比} = -\text{久期} \times \text{收益率的变化}$$

后面还要用到价值久期(Dollar duration)这个概念，其定义为：

$$\text{价值久期} = \text{久期} \times \text{价格}$$

假定一个债券的年息票率是 c ，到期日前还有 N 次利息支付，利息半年支付一次，收益率为 y (半年复利一次的年收益率)。现在离下一次利息支付还有 6 个月，久期的计算公式推导如下：

债券的价格为：

$$P = \sum_{k=1}^N \frac{c/2}{(1+y/2)^k} + \frac{1}{(1+y/2)^N} \quad (3.3)$$

价格对收益率 y 求导数：

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dy} &= - \left[\sum_{k=1}^N \frac{(1/2)(k)(c/2)}{(1+y/2)^{k+1}} + \frac{(1/2)N}{(1+y/2)^{N+1}} \right] \\ &= - \left(\frac{1}{1+y/2} \right) \left[\sum_{k=1}^N \frac{t_k(c/2)}{(1+y/2)^k} + \frac{t_N}{(1+y/2)^N} \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

其中 $t_k = \frac{k}{2}$ ，它是现在离第 k 个付息日的时间长度(单位是年)。

久期为：

$$\begin{aligned} D &= - \frac{dP}{dy} / P \\ &= \sum_{k=1}^N \left[\frac{(1/2)(k)(c/2)}{(1+y/2)^{k+1}} + \frac{(1/2)N}{(1+y/2)^{N+1}} \right] / P \\ &= \left(\frac{1}{1+y/2} \right) \left[\sum_{k=1}^N \frac{t_k(c/2)}{(1+y/2)^k} - \frac{t_N}{(1+y/2)^N} \right] / P \end{aligned} \quad (3.5)$$

如果不考虑 $1/(1+y/2)$ ，久期可以这样来理解：久期是现金流到达时间 t_k 的加权

平均,权值是现金流的现值,即权值为:

$$w_k = \frac{c/2}{(1+y/2)^k} / P$$

例 3.1 一个 10 年期,面值为 100,息票率为 6% 的债券,投资者要求的收益率也是 6%,即它是一个平价债券,利用(3.5)式计算出久期是 7.44 年。假定由于利率发生变化,投资者对这个债券要求的收益率增加 0.5%,即

$$\Delta y = 0.005$$

利用久期计算出价格的变化为:

$$\Delta P = -7.44 \times 100 \times 0.005 = -3.72$$

价格下降到:

$$P + \Delta P = 100 - 3.72 = 96.28$$

收益率上涨 0.5%,根据久期计算出价格下降到 96.28。由于利用久期计算价格变化相当于泰勒展开式的一阶近似,96.28 只是一个近似值,利用(3.3)式可以计算出收益率下降 0.5% 后,债券的价格应为 96.37。两者相比可以看出通过久期计算价格变化给出了一个比较好的近似结果。表 3.2 给出了该债券根据久期计算出的价格变化和实际价格变化的对比。可以看到,收益率变化越小,根据久期计算的价格与实际价格差别越小,反之,差别越大。道理很简单,久期来自于一阶导数,根据久期的计算结果相当于泰勒展开式的一阶近似,收益率变化越小,近似效果越好,反之效果越差。

表 3.2 在不同收益率下,利用久期计算出的债券价格与债券的实际价格的比较

收益率(%)	债券价格	根据久期计算的价格	两种价格的差别
金 融 工 程 学	4.00	116.35	114.88
	4.5	111.97	111.16
	5.00	107.79	107.44
	5.50	103.81	103.72
	6.00	100	100
	6.50	96.37	96.28
	7.00	92.89	92.56
	7.50	89.58	88.84
	8.00	86.41	85.12
			1.29

资料来源:J. Cox, *Investment Banking*, MIT Transparency。

麦考利(Macaulay)久期是久期的另外一种表达方式,由麦考利 1938 年给出。当初它的提出并没有与价格风险联系起来。相对于麦考利久期,前面定义的久期称为调整的久期(modified duration),后文提到久期,如果不加说明,指的是调整的久期。麦考利久期可以通过调整的久期来定义:

$$\text{麦考利久期} = \left(1 + \frac{y}{2}\right) \times \text{调整的久期}$$

等式右边乘以 $\left(1 + \frac{y}{2}\right)$ 是因为定义久期时用的是半年复利一次的名义年收益率。如果用的收益率是一年复利一次的收益率,右边应该乘以 $(1+y)$ 。麦考利久期有如下两种直观解释:

(1) 一个证券的麦考利久期是其现金流的平均到达时间。显然,不付息债券的现金流的平均到达时间是这个债券到期日。对于一个付息债券,比如息票率为6%,半年付息一次,面值是100,10年后到期,现价是100,它的现金流平均到达时间是:

$$\frac{1}{100} \left[\sum_{k=1}^{20} \frac{6}{(1+6\%)^k} \times \frac{k}{2} + \frac{100}{(1+6\%)^{20}} \times 10 \right] = 7.66$$

(2) 麦考利久期是债券价格关于其收益率的弹性。如果用的收益率是一年复利一次的年收益率,麦考利久期的计算公式为:

$$\begin{aligned} MD &= -\left(\frac{dP}{dy}\right) \times \frac{1+y}{P} \\ &= -\frac{dP}{P} / \frac{d(1+y)}{1+y} \end{aligned} \quad (3.6)$$

分子是价格的变化率,分母是收益率的变化率。

3.2 久期的性质

久期是债券分析中的核心概念,它有效地度量了债券的风险,在债券的风险管理中起到了非常重要的作用,另外它也是资产免疫管理中的一个核心概念。资产免疫管理是指通过适当的方式,来避免利率的非预期波动对资产价值的影响。

还可以这样来理解久期与债券风险的关系。根据久期的定义(3.2)式,有:

$$\frac{dP}{P} = -D dy$$

因此债券价格变化率(回报率)的方差为:

$$\text{var}\left(\frac{dP}{P}\right) = -D^2 \text{var}(dy)$$

标准差为:

$$\sigma\left(\frac{dP}{P}\right) = D\sigma(dy) \quad (3.7)$$

(3.7)式告诉我们,在收益率的微小变动下,债券价格变化率(短期回报率)的标准

差是收益率标准差的 D 倍。

久期在资产免疫中的作用后面还会详细介绍，下面先看久期与息票率、到期收益率、到期日的关系。

3.2-1 久期与债券息票率的关系

以麦考利久期为例，为计算方便，假定债券一年付息一次，息票率为 c ，面值为 1，现在离到期日还有 N 年，其收益率是一年复利一次的年收益率 y ，债券的价格为：

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=1}^N \frac{c}{(1+y)^k} + \frac{1}{(1+y)^N} \\ &= \frac{c}{y} [1 - (1+y)^{-N}] + \frac{1}{(1+y)^N} \end{aligned}$$

两边取对数，得到：

$$\ln P = -\ln(y) + \ln \left\{ c[1 - (1+y)^{-N}] + \frac{1}{(1+y)^N} \right\}$$

再对收益率求导数：

$$\begin{aligned} \frac{d \ln P}{dy} &= \frac{1}{P} \times \frac{dP}{dy} \\ &= -\frac{1}{y} + \frac{cN(1+y)^{-N-1} + (1+y)^{-N} + y(1+y)^{-N-1}(-N)}{c[1 - (1+y)^{-N}] + y(1+y)^{-N}} \end{aligned}$$

上式两边乘以 $-(1+y)$ ，左边是麦考利久期 MD ，右边经过整理得到：

$$MD = 1 + \frac{1}{y} + \frac{N(y - c) - (1+y)}{c[1 - (1+y)^N] + y(1+y)^{-N}} \quad (3.8)$$

从(3.8)式可以明显地看出久期与息票率的关系，息票率 c 越大，久期越小。

3.2-2 久期与收益率之间的关系

从久期的计算公式中可以看出，投资者要求的收益率越大，久期越小，但我们还是想用一个完整的数学式子表达久期与收益率之间的关系。更一般地，假定债券的现金流为 c_1, c_2, \dots, c_T ，现金流的到达时间为第 1, 2, …, T 年，投资者要求的年收益率为 y ，债券的价格为 P ，则债券的麦考利久期为：

$$MD = \frac{1}{P} \sum_{t=1}^T t c_t (1+y)^{-t} \quad (3.9)$$

久期对收益率的敏感性，可以用久期对收益率的导数表示为：

$$\frac{dMD}{dy} = \frac{-1}{P^2} \left[\sum_{t=1}^T t^2 c_t (1+y)^{-t-1} P + \sum_{t=1}^T t c_t (1+y)^{-t} \frac{dP}{dy} \right] \quad (3.10)$$

把 $\frac{1}{P^2}$ 放到中括号里, 而把 $\frac{1}{1+y}$ 从内括号提出来, 得到:

$$\frac{dMD}{dy} = \frac{-1}{1+y} \left[\sum_{t=1}^T t^2 c_t (1+y)^{-t} / P + (1+y) \left(\sum_{t=1}^T t c_t (1+y)^{-t} / P \right) \left(\frac{dP}{dy} / P \right) \right] \quad (3.11)$$

(3.11)式中括号里的第二项是久期的平方的负值, 故有:

$$\frac{dMD}{dy} = \frac{-1}{1+y} \left[\sum_{t=1}^T t^2 c_t (1+y)^{-t} / P - MD^2 \right] \quad (3.12)$$

(3.12)式右边中括号项反映了现金流到达时间的集中程度, 即现金流到达时间的方差。其实中括号的项还可以写为:

$$\sum_{t=1}^T t^2 c_t (1+y)^{-t} / P - MD^2 = \sum_{t=1}^T \frac{c_t (1+y)^{-t}}{P} (t - MD)^2 \quad (3.13)$$

(3.13)式形象地表示它反映了现金流的集中程度, 它是一个正值。结合(3.12)式和(3.13)式, 可以看到 $\frac{dD}{dy} \leq 0$, 即收益率越大, 久期越小。

3.2-3 久期与到期日的关系

一般认为, 债券的到期日越长, 久期越大。如果要比较准确地叙述久期和到期日的关系, 可以归结为下面几点:

(1) 对于零息票债券来说, 麦考利久期与到期日相同, 因此久期因到期日增加而增加。

(2) 对于付息债券, 麦考利久期的最大极限值为:

$$1 + \frac{1}{y}$$

这个极限值独立于息票率。

(3) 对于息票率大于等于收益率的债券, 到期日越长, 麦考利久期越大, 最后趋于极限 $1 + \frac{1}{y}$ 。

(4) 对于息票率低于收益率的证券, 到期日的增加首先会导致麦考利久期的增加, 直到最大值, 然后麦考利久期变小, 最后趋于极限 $1 + \frac{1}{y}$ 。

久期与到期日的关系证明起来较为繁琐, 在此略去, 有兴趣的读者可参考 O. Grandaville, 2001。

3.3 久期与风险管理

3.3-1 资产组合的久期

对单个资产，久期这个概念并不是很重要的，因为它的现金流比较清晰。但作为价格风险的度量对一个资产组合来说，其优越性就显现出来了。一个资产组合的久期的标准定义为：资产组合的久期等于组成资产组合的各个资产的久期的加权平均，权值是各个资产的现价。与资产组合久期的定义相对应的是资产组合的收益率，资产组合的收益率定义为：资产组合的收益率是资产组合的现金流的到期收益率。

其实，资产组合的久期可以在一定的假设下推导出来。以两个资产的资产组合为例，资产组合 P 由 N_1 份债券 B_1 , N_2 份债券 B_2 组成，债券组合、债券的现价仍分别记成 P , B_1 , B_2 ，则价格之间有关系：

$$P = N_1 B_1 + N_2 B_2$$

如果债券具有相同的收益率 y ，则：

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dy} &= N_1 \frac{dB_1}{dy} + N_2 \frac{dB_2}{dy} \\ -\frac{1}{P} \frac{dP}{dy} &= \frac{N_1 B_1}{P} \left(-\frac{1}{B_1} \frac{dB_1}{dy} \right) + \frac{N_2 B_2}{P} \left(-\frac{1}{B_2} \frac{dB_2}{dy} \right) \end{aligned}$$

即

$$D_P = \frac{N_1 B_1}{P} (D_{B_1}) + \frac{N_2 B_2}{P} (D_{B_2}) \quad (3.14)$$

例 3.2 一个资产组合由 B_1 和 B_2 组成，它们的价格、收益率、久期分别是：

$B_1 = 100$, $y_1 = 7.00\%$, $D_1 = 0.483\,092$, $B_2 = 100$, $y_2 = 8.8\%$, $D_2 = 1.797\,968$

则资产组合的久期为：

$$D_P = \frac{100}{100+100} \times 0.483\,092 + \frac{100}{100+100} \times 1.797\,968 = 1.140\,53$$

资产组合的现金流是：

时间(年)	0.5	1	1.5	2.0
现金流	107.9	4.4	4.4	104.4

由现金流计算出收益率：

$$200 = \frac{107.9}{\left(1 + \frac{y}{2}\right)} + \frac{4.4}{\left(1 + \frac{y}{2}\right)^2} + \frac{4.4}{\left(1 + \frac{y}{2}\right)^3} + \frac{104.4}{\left(1 + \frac{y}{2}\right)^4}$$

$$y = 8.422\%$$

我们还可以把资产组合看成一个证券，通过久期的定义计算出资产组合的久期：

$$\frac{1}{1 + \frac{y}{2}} \left[\frac{(0.5)107.9}{\left(1 + \frac{y}{2}\right)} + \frac{(1)4.4}{\left(1 + \frac{y}{2}\right)^2} + \frac{(1.5)4.4}{\left(1 + \frac{y}{2}\right)^3} + \frac{(2)104.4}{\left(1 + \frac{y}{2}\right)^4} \right] / 200$$

$$= 1.193477$$

这个计算结果与利用资产组合久期公式计算出的结果稍有差别。这两种计算方法的结果一般是不同的，只有在利率的期限结构是平坦的时候，两者的结果才会完全相同。

3.3-2 久期的匹配

我们在进行风险管理时，有时需要构造一个资产组合，其价值与某个债券或债券组合相同，并且在利率发生波动的情况下，两者的价值变动也相同。如果一个是多头，一个是空头，两者的风险就可以对冲。久期可以帮助构造这样一个资产组合，只要求两者的现价相同，两者的久期也相同，就可以近似地做到这一点。

例 3.3 假定持有一个债券，10 年后到期，息票率是 6%，投资者要求的收益率也是 6%，即它是一个平价债券。如果市场利率上升，债券价格有下降的风险。投资者可以采取持有其他债券的空头来对冲它的利率风险，假定可供选择的债券有两个，其价格和久期为：

债券	价格	久期
1 年后到期的不付息债券	94.2596	0.9709
30 年期的平价债券	100.0000	13.8378

上述三种债券的面值都是 100。现在我们就来确定应持有这两种债券的数量 x, y ，使这个资产组合能够对冲 10 年期债券的利率风险。这个资产组合应该满足两个条件：现价应该等于 10 年期平价债券的现价，久期应该等于该债券的久期。即 x, y 应该满足：

$$94.2596 \times x + 100 \times y = 100 \quad (3.15a)$$

$$0.9709 \times 94.2596 \times x + 13.8378 \times 100 \times y = 13.8378 \times 100 \quad (3.15b)$$

方程组(3.15)的解是：

$$x = 0.5276, y = 0.5027$$

这个资产组合也叫久期匹配的资产组合。表3.3显示的是在不同的收益率下资产组合的价值和目标资产的价值的对比，从中可以比较它们是否具有相同的价值变化或利率风险。可以看出，收益率变化不大时，两者价值的差异不大，但收益率变化很大时，如表中收益率上涨2个百分点或下降2个百分点时，两者的差异就比较大了。

表3.3 不同的收益率下，久期匹配的资产组合和目标债券价值的对比

目标资产：10年期债券，面值=100，息票率=6%，久期=7.44			
收益率(%)	债券价格	久期匹配的资产组合的价格	两者之差
4.00	116.35	118.45	2.10
4.50	111.97	113.08	1.11
5.00	107.79	108.25	0.46
6.00	100	100.00	0.00
6.50	96.37	96.46	0.09
7.00	92.89	93.25	0.36
7.50	89.58	90.33	0.75
8.00	86.41	87.66	1.25

资料来源：同表3.2。

3.3-3 久期与免疫(immunization)

如果从短期看，一旦利率下降，债券价格上涨，债券的短期投资者将会从利率下降中获益。反之，如果利率上升，短期持有债券就会受到损失。但如果从长期来考虑，情况就会相反，利率下降将会导致债券持有者的收益下降。因为债券在到期时的价值一定等于面值，利率下降导致债券利息的再投资收益率下降，从而债券全部收益——包括债券价格和利息再投资收益——下降。而利率上升时情况正好相反。从长期看和从短期看的两种正好相反的结果预示着存在一个“中期”。从“中期”看投资者的收益基本上不受利率变化的影响。这个“中期”正好是债券的久期。

一旦投资者的投资期限正好等于其持有的资产组合的久期，利率的任何变化（利率期限结构的平行移动）对投资的收益不会造成影响。

免疫策略作为一种债券组合管理方法，能够使投资者免受利率波动的影响。显然这种资产组合管理方法是动态的。因为即使利率不发生波动，债券的久期会随着到期日的临近而变短，同样，利率的波动也会导致债券久期的变化。只有不断调整资产组合中的债券，才能够使投资者的投资期限与资产组合的久期相同。

免疫策略也有它的适用范围，它一般假定利率期限结构平行移动，另外，组成资产组合的债券要有足够的流动性。利率期限结构不平行移动时，久期等于投

资期只能近似地说明利率变动不影响债券的收益；债券的流动性要求可以避免资产组合动态调整时交易成本过大。

3.3-4 久期的近似计算

对于简单债券，可以直接利用定义计算债券的久期。但对于较复杂的债券，特别是在后文中要遇到的含有一定期权的债券，直接用久期的定义计算久期可能很复杂，甚至不可行，这时久期的计算可以采取近似计算方式。记：

V_0 ：债券的价格；

Δy ：证券收益率的变化量；

V_- ：收益率减少 Δy 后的债券价格；

V_+ ：收益率增加 Δy 后的债券价格。

价格关于收益率的导数可以用收益率增加或减少 1 单位的情况下价格的变化率来代替。价格的变化率为：

$$\frac{V_- - V_+}{2V_0}$$

久期的近似表达式是：

$$\frac{V - V_1}{2V_0(\Delta y)} \quad (3.16)$$

例 3.4 假定债券的价格是 74.26，相应的收益率是 10%，债券增加和减少 20 个基本点 (basis point) 导致债券价格分别变化到 75.64、72.92。即：

$$V_0 = 74.26, \Delta y = 0.20\%, V_- = 75.64, V_+ = 72.92$$

久期近似为：

$$\frac{V_- - V_+}{2V_0(\Delta y)} = \frac{75.64 - 72.92}{2 \times 74.26 \times 0.002} = 9.16$$

久期的近似计算方法在计算复杂债券的久期时非常重要。对于含有期权的证券，收益率变化往往导致债券现金流发生变化，现金流不再是固定的，而是随利率变化而变化，这时近似方式计算久期往往是简便可行的方式，计算出的久期称为有效久期 (effective duration)。

3.4 凸 度

债券价格主要随利率变化而变化，利率的变化导致投资者对债券要求的收益率发生变化。把债券价格看成收益率的函数，然后把它用泰勒展开式展开，得：

$$\Delta P \approx \frac{dP}{dy} \Delta y + \frac{1}{2} \frac{d^2 P}{dy^2} (\Delta y)^2 \quad (3.17)$$

等式两边除以价格 P 后, 左边是债券价格的变化率(或收益率), 它约等于:

$$\frac{\Delta P}{P} \approx \frac{\frac{dP}{dy}}{P} \Delta y + \frac{1}{2} \frac{\frac{d^2 P}{dy^2}}{P} (\Delta y)^2 \quad (3.18)$$

收益率变化的一次项是久期, 二次项定义成凸度。即凸度定义为:

$$\text{凸度} = \frac{\frac{d^2 P}{dy^2}}{P} \quad (3.19)$$

从(3.18)式可以看出债券价格变化与久期、凸度的关系为:

债券的价格变化 = 久期 × 价格 × 收益率的变化 + 凸度 × 价格 × (收益率变化)² / 2

下面我们推导凸度的计算公式。假定债券的现金流为 c_1, c_2, \dots, c_T , 现金流的到达时间为第 t_1, t_2, \dots, T 年, 投资者要求的年收益率为 y , 债券价格为 P 。价格与收益率的关系为:

$$P = \sum_{t=t_1}^T \frac{c_t}{(1+y)^t}$$

价格对收益率求导数:

$$\frac{dP}{dy} = - \left[\sum_{t=t_1}^T t \frac{c_t}{(1+y)^{t+1}} \right]$$

价格对收益率求二阶导数:

$$\frac{d^2 P}{dy^2} = - \frac{1}{P(1+y)^2} \left[\sum_{t=t_1}^T t(t+1) \frac{c_t}{(1+y)^t} \right]$$

凸度为:

$$C = - \frac{1}{P} \frac{d^2 P}{dy^2} = \frac{1}{P(1+y)^2} \left[\sum_{t=t_1}^T t(t+1) \frac{c_t}{(1+y)^t} \right] \quad (3.20)$$

从(3.20)式可以看出, 凸度总是正值, 凸度的单位是时间单位的平方, 如果时间以年作单位, 凸度的单位是年的平方。由于凸度考虑了价格随收益率的二阶变化, 利用凸度计算价格随收益率的变化具有更好的近似效果。

例 3.5 考虑一个 10 年后到期, 面值是 100, 息票率是 6%, 半年付息一次的平价债券, 其久期和凸度经过计算分别为 $D = 7.44$, $C = 68.77$ 。假定收益率上升 0.5%, 利用凸度可以计算出价格变化为:

$$-100 \times \frac{1\%}{2} \times 7.44 + \frac{1}{2} \times 100 \times 68.77 \times \left(\frac{1\%}{2}\right)^2 = -3.63$$

价格下降到：

$$100 - 3.63 = 96.37$$

如果收益率下降 0.5%，导致的价格变化为：

$$-100 \times \frac{-1\%}{2} \times 7.44 + \frac{1}{2} \times 100 \times 68.77 \times \left(-\frac{1\%}{2}\right)^2 = 3.81$$

价格上升到：

$$100 + 3.81 = 103.81$$

根据凸度计算出的价格变化和真实的价格变化作一个比较如表 3.4 所示。

表 3.4 债券价格与利用凸度给出的估计值比较

10 年期的债券, 面值 = 100, 息票率 = 6%, 久期 = 7.44, 凸度 = 68.77			
收益率(%)	债券价格	利用凸度给出的估计值	差异
4.00	116.35	116.25	0.10
4.50	111.97	111.93	0.04
5.00	107.79	107.78	0.01
5.50	103.81	103.81	0.00
6.00	100	100	0.00
6.50	96.37	96.37	0.00
7.00	92.89	92.90	-0.01
7.50	89.58	89.61	-0.03
8.00	86.41	86.50	-0.09

资料来源：同表 3.2。

凸度是根据二阶导数给出的，它的金融意义比较难以解释，甚至出现了很多错误的解释，其中一种解释是把凸度看成久期对利率的敏感度。这种解释是错误的，从下面的推导可以清楚地看出。

$$\begin{aligned} \frac{d(\text{久期})}{dy} &= \frac{d\left(-\frac{dP}{dy}/P\right)}{dy} \\ &= -\left[\frac{P\left(\frac{d^2P}{dy^2}\right) - \left(\frac{dP}{dy}\right)^2}{P^2}\right] \\ &= \text{久期}^2 - \text{凸度} \end{aligned} \quad (3.21)$$

现在我们就来考虑怎样解释债券的凸度。首先从麦考利久期开始，由(3.6)式知道

$$MD = -\left(\frac{dP}{dy}\right) \times \frac{1+y}{P}$$

麦考利久期对收益率求导数得：

$$\frac{dMD}{dy} = - \left[\frac{P - (1+y)P'}{P^2} \right] P' - \frac{1+y}{P} P''$$

再由(3.12)式和(3.13)式,如果记:

$$S = \sum_{t=1}^T t^2 c_t (1+y)^{-t} / P - MD^2 = \sum_{t=1}^T \frac{c_t (1+y)^{-t}}{P} (t - MD)^2$$

有:

$$(1+y)^{-1} S = - \left[\frac{P - (1+y)P'}{P^2} \right] P' - \frac{1+y}{P} P'' \quad (3.22)$$

根据久期和凸度的定义,如果记凸度为C,则有:

$$P'/P = -MD/(1+y)$$

$$P''/P = C$$

(3.22)式两边乘以(1+y),得到:

$$-MD(MD + 1) + (1+y)^2 C = S$$

最后得到:

$$C = \frac{1}{(1+y)^2} [S + MD(MD + 1)] \quad (3.23)$$

(3.23)式给出了凸度的准确金融含义,它由两项构成,第一项S是现金流的集中程度,第二项反映了久期的大小。在久期给定的情况下,凸度就反映了债券带来的现金流的集中程度,现金流越集中,凸度越小,现金流越分散,凸度越大。

例 3.6 假定表3.5中的每个资产组合都由两个面值是1的不付息债券组成,这些不付息债券的收益率都是6%,相当于假定利率的期限结构是一条直线。这些资产组合具有近似相同的久期,有两次现金流支付,每次是1,但是它们的凸度差别很大,原因在于每个资产组合的两次现金流的间隔不一样。

表 3.5 凸度的比较:资产组合具有相同的久期,凸度的差异来自现金流的集中程度差异

组成资产组合的,两个面值是1的,不付息债券的到期日(年)	资产组合的久期(近似值)	资产组合的凸度
10	9.7087	98.9726
8	9.7087	102.7430
6	9.7087	114.0541
4	9.7087	132.9060
2	9.7087	159.2987

资料来源:同表3.2。

一个债券的凸度除了取决于现金流的集中程度外,还与收益率、到期日、息票率有关,收益率越高,凸度越小;到期日越远,凸度越大;息票率越大,凸度越小。表

表 3.6 和表 3.7 反映了凸度与收益率、到期日、息票率的关系。

表 3.6 凸度与收益率、到期日的关系

收益率	所有债券的息票率都是 6%			
	债券的到期时间(单位:年)	10	20	30
0.00	80.06	264.64	529.39	
2.00	76.29	238.60	447.99	
4.00	72.53	212.46	368.95	
6.00	68.77	186.83	296.47	
8.00	65.04	162.32	233.64	
10.00	61.35	139.19	181.83	
12.00	57.70	118.71	140.78	

资料来源:同表 3.2。

表 3.7 凸度与息票率、到期日的关系

息票率	所有债券的收益率都是 6%			
	债券的到期时间(单位:年)	10	20	30
0.00	98.97	386.46	862.48	
2.00	84.64	262.71	439.91	
4.00	75.32	213.36	340.75	
6.00	68.77	186.83	296.47	
8.00	63.92	170.26	271.39	
10.00	60.18	158.93	255.24	
12.00	57.21	150.69	243.98	

资料来源:同表 3.2。

3.5 凸度与风险管理

3.5-1 资产组合的凸度

在利用凸度进行风险管理时,首先遇到的是计算资产组合的凸度,资产组合的凸度定义为:资产组合的凸度等于资产组合中的各个证券凸度的加权平均,权值是各个证券的价值。有时还用到资产的价值凸度,价值凸度的定义为:

价值凸度=价格×凸度
资产组合的价值凸度定义为:

资产组合的价值凸度=资产组合的凸度×资产组合的价格

这样定义资产组合的凸度会不会出现矛盾？因为资产组合也可以看成一个资产，由资产凸度的定义，资产组合 P 的凸度自然应该定义为：

$$C_P = \frac{1}{P} \frac{d^2 P}{dy^2}$$

不失一般性，假定资产组合 P 由 N_1 份债券 B_1 和 N_2 份债券 B_2 组成，债券、债券组合的现价仍分别记成 B_1, B_2, P ，则价格之间有关系为：

$$P = N_1 B_1 + N_2 B_2$$

如果债券具有相同的收益率 y ，资产组合的收益率也是 y ，则有：

$$\frac{dP}{dy} = N_1 \frac{dB_1}{dy} + N_2 \frac{dB_2}{dy}$$

再求二阶导数，然后除以价格 P ，得到：

$$\begin{aligned} C_P &= \frac{1}{P} \frac{d^2 P}{dy^2} \\ &= \frac{N_1 B_1}{P} \left(\frac{1}{B_1} \frac{d^2 B_1}{dy^2} \right) + \frac{N_2 B_2}{P} \left(\frac{1}{B_2} \frac{d^2 B_2}{dy^2} \right) \\ &= \frac{N_1 B_1}{P} C_{B_1} + \frac{N_2 B_2}{P} C_{B_2} \end{aligned}$$

即

$$C_P = \frac{N_1 B_1}{P} C_{B_1} + \frac{N_2 B_2}{P} C_{B_2} \quad (3.24)$$

因此在所有债券的收益率都是一样的情况下，两种定义方式是一致的。但在实际问题中，利率期限结构一般不是一条水平直线，有不同到期日或不同息票率的债券的收益率不一样，两种定义会出现一些差别。但直接把资产组合的凸度看成是各个资产凸度的加权平均可以大大简化计算，也不至于出现大的误差。

在利率上升的情况下，一个债券的价格可能下降，如果债券持有者不愿意承担这个利率风险，可以通过其他债券的组合把该利率风险对冲掉。如果一个资产组合与目标债券具有相同的久期、凸度，现价也相同，这一资产组合在利率上升或下降的情况下与该债券的价格都近似相同，利率风险就可以对冲掉。

例 3.7 为简便起见，假定本例中所有债券的收益率都是 6%，目标资产为：

债券	价格	久期	凸度
10 年期平价债券	100	7.4387	68.7748

由以下资产构造凸度匹配的资产组合：

债券	价格	久期	凸度
1年期不付息债券	94.2596	0.9709	1.4139
5年期平价债券	100.00	4.2651	21.7665
30年期平价债券	100.00	13.8378	296.47

为了构造久期、凸度匹配的资产组合,假定三种债券各需要的数量为 x, y, z ,这三者应该满足条件:

(1) 资产组合的价格 = 目标资产的价格:

$$94.2596x + 100y + 100z = 100$$

(2) 资产组合的久期 = 目标资产的久期:

$$0.9709 \times 94.2596x + 4.2651 \times 100y + 13.8378 \times 100z = 7.4378 \times 100$$

(3) 资产组合的凸度 = 目标资产的凸度:

$$1.4139 \times 94.2596x + 21.7665 \times 100y + 296.47 \times 100z = 7.4378 \times 100$$

求解结果为:

$$x = -0.6302, y = 1.4669, z = 0.1271$$

下面再来验证一下,这一资产组合的价格和目标资产的价格是否在收益率的各种变化下,都具有相似的价格,结果如表 3.8 所示。

表 3.8 债券和凸度匹配的资产组合在各种收益率下的价格比较

目标资产: 10 年期债券, 6% 的收益率, $D = 7.44$, $C = 68.77$			
收益率	债券价格	凸度匹配的资产组合的价格	价格差异
4.00	116.35	116.42	0.07
4.50	111.97	112.00	0.03
5.00	107.79	107.80	0.01
5.50	103.81	103.81	0.00
6.00	100.00	100.00	0.00
6.50	96.37	96.37	0.00
7.00	92.89	92.89	0.00
7.50	89.58	89.56	-0.02
8.00	86.41	86.36	-0.05

资料来源:同表 3.2。

3.5-2 凸度与免疫

避免利率的波动对资产负债价值的影响是金融机构如保险公司、养老基金、银行,以及个体投资者关心的一个重要问题。雷丁顿(F. M. Redington)1952 年首

先把久期、凸度等概念应用到债券免疫中。下面介绍资产负债管理中的雷丁顿条件。

假定一个金融机构,未来的现金流支出为:

$$L_1, L_2, \dots, L_T$$

现金流流入为:

$$A_1, A_2, \dots, A_T$$

假定利率的期限结构是水平的,所有债券的收益率都是 y ,资产和负债的现值分别为:

$$L = \sum_{t=1}^T L_t / (1+y)^t$$

$$A = \sum_{t=1}^T A_t / (1+y)^t$$

雷丁顿假定资产负债的现值相同,资产的价值正好可以支付负债。首先需要解决的问题是,在什么条件下资产对负债的支付能力不受利率变化的影响,也就是净资产的价值 $N = A - L$ 不受利率变化的影响。显然净资产要满足条件:

$$\frac{dN}{dy} = \frac{d}{dy} \left[\sum_{t=1}^T (A_t - L_t) / (1+y)^t \right] = 0 \quad (3.25)$$

(3.25)式经过整理得:

$$\frac{dN}{dy} = \frac{1}{1+y} \left[\sum_{t=1}^T t(A_t - L_t) / (1+y)^t \right] = AD_A - LD_L \quad (3.26)$$

其中 AD_A 是资产的价值久期, LD_L 是负债的价值久期。(3.26)式说明如果要使净资产的价值不受利率微小变化的影响,资产的价值久期应该等于负债的价值久期。特别地,如果资产和负债现值相同,资产的久期与负债的久期应该相同。

需要解决的第二个问题是,在利率变化下,如何使净资产的价值不要变成负值。由于净资产 N 是收益率 y 的函数,其现值为 0,(3.26)式已经满足,只要求净资产是收益率的凸函数(convex function),那么,在收益率的微小波动下,净资产的价值为正(因为一阶导数为 0)。因此净资产价值非负的条件为:

$$\frac{d^2 A}{dy^2} - \frac{d^2 L}{dy^2} \geq 0$$

$$\frac{d^2 A}{dy^2} / A - \frac{d^2 L}{dy^2} / L = C_A - C_L \geq 0 \quad (3.27)$$

我们可以从金融含义上解释(3.26)式和(3.27)式:(3.26)式要求资产和负债的现金流平均到达的时间要相同;(3.27)式要求资产的现金流要比负债的现金流更分散。

3.6 计算久期的其他方法

前面讨论的久期、凸度都是用来反映债券价格关于收益率变化的风险，而收益率又与证券本身直接相关，不同的债券具有不同的收益率。因此不同债券的久期和凸度是在不同收益率下计算出来的。其实久期和凸度的最终目的是反映债券价格的利率风险，因此也可以利用利率直接定义久期和凸度。现以久期为例说明。

一个债券在到期前有 T 次现金流支付，现金流为 c_1, c_2, \dots, c_T ，其价格与不付息债券的收益率或称利率期限结构有关系：

$$P = \sum_{t=1}^T \frac{c_t}{(1+y^{(o)})^t} \quad (3.28)$$

其中 $y^{(o)}(t=1, 2, \dots, T)$ 是第 t 年到期的不付息债券的到期收益率。由于这一债券的现金流是固定的，价格的变化取决于不付息债券收益率的变化，即利率的期限结构的变化。如果不付息债券的收益率的变化具有同样的幅度（也称为利率期限结构的平行移动），则久期可定义为：

$$-\sum_{t=1}^T \left(\frac{dP}{dy^{(o)}} \right) / P = -\left(\sum_{t=1}^T \frac{t \times c_t}{(1+y^{(o)})^{t+1}} \right) / P \quad (3.29)$$

前面已介绍过，价格可以用远期利率来表示，假定债券的息票率是 c ，到期前有 T 次利息支付，价格和远期利率的关系为：

$$P = \sum_{t=1}^T \frac{c_t}{\prod_{i=1}^t (1+f_i^{(1)})} \quad (3.30)$$

如果认为不同到期日的远期利率一般是等幅度变化的，久期也可以定义为：

$$\begin{aligned} & -\sum_{t=1}^T \left(\frac{dP}{df_t^{(1)}} \right) / P \\ & = -\left[\sum_{t=1}^N \frac{1}{(1+f_t^{(1)})} \text{(除了第 } t-1 \text{ 个现金流外所有现金流的现值)} \right] / P \end{aligned} \quad (3.31)$$

这两种定义方式与传统的定义方式比起来有以下特点：

- (1) 这两种定义避免了不同债券的收益率的不同，所有债券都使用相同的利率或远期利率。
- (2) 与传统的计算方法比较，这两种定义方法计算起来要复杂一些。
- (3) 这两种方法计算结果也会出现不一致，因为一个假定不付息债券的收益率等幅度变化，另一个假定远期利率等幅度变化，而这两种假定一般不会同时

成立。

(4) 如果利率的期限结构是水平的,传统的计算方法和这两种方法计算结果是相同的。否则的话,三种方法的计算结果不同,但是会很相近。

3.7 浮动利率债券的久期

前面遇到的债券都是最简单的具有固定现金流的债券,但在债券市场上,其他类型的债券是很普遍的。如浮动利率债券,其产生于20世纪80年代,是一种常见的债券种类。典型的浮动利率债券也具有到期日、面值,但它的息票率是不固定的,一般以某一个市场基准利率作为参考,如LIBOR或半年期国库券的收益率。对于半年付息一次的浮动利率债券来说,息票率由具有同样时间到期日的基准利率决定。下面引进记号:

C =半年确定一次的息票率;

R =浮动利率债券的参考利率。

如果一个债券刚发行,或者,今天购买一个债券,它的下一个利息支付已经确定,记息票率为 $C=\bar{R}$,为简便起见,假定今天离下一个付息日正好有半年,则债券的价格与市场参考利率有关系:

$$\begin{aligned} P &= \frac{\frac{\bar{R}}{2}}{\left(1+\frac{R}{2}\right)} + \sum_{k=2}^N \frac{\frac{R}{2}}{\left(1+\frac{R}{2}\right)^k} + \frac{1}{\left(1+\frac{R}{2}\right)^N} \\ &= \frac{\frac{\bar{R}-R}{2}}{\left(1+\frac{R}{2}\right)} + \sum_{k=1}^N \frac{\frac{R}{2}}{\left(1+\frac{R}{2}\right)^k} + \frac{1}{\left(1+\frac{R}{2}\right)^N} \\ &= \frac{\frac{\bar{R}-R}{2}}{\left(1+\frac{R}{2}\right)} + 1 \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dR} &= \frac{\left(1+\frac{R}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\bar{R}}{2} - \frac{R}{2}\right)\frac{1}{2}}{\left(1+\frac{R}{2}\right)^2} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1+\frac{\bar{R}}{2}}{\left(1+\frac{R}{2}\right)^2} \end{aligned} \quad (3.33)$$

如果 $\bar{R}=R$,则:

$$\frac{-\left(\frac{dP}{dR}\right)}{P} = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{1+R/2}\right) \quad (3.34)$$

因此一个浮动利率债券的久期就是一个半年后到期不付息债券的久期。

如果一个浮动利率债券的息票率是参考利率的两倍，这个债券被称为双倍浮动利率债券(double floater)，这种债券的息票率与参考利率的关系为： $C = 2R$ 。假定今天购买一个双倍浮动利率债券，今天离下一个付息日正好还有半年，下一次利息已经确定，为 \bar{R} ，则双倍债券的价格和久期可以分别计算出来：

$$\begin{aligned} P &= \frac{2 \frac{\bar{R}}{2}}{\left(1 + \frac{R}{2}\right)} + \sum_{k=1}^N \frac{2 \frac{R}{2}}{\left(1 + \frac{R}{2}\right)^k} + \frac{1}{\left(1 + \frac{R}{2}\right)^N} \\ &= \frac{\bar{R} - R}{\left(1 + \frac{R}{2}\right)} + \sum_{k=1}^N \frac{2 \frac{R}{2}}{\left(1 + \frac{R}{2}\right)^k} + \frac{1}{\left(1 + \frac{R}{2}\right)^N} \\ &= \frac{\bar{R} - R}{\left(1 + \frac{R}{2}\right)} + 2 \left[\sum_{k=1}^N \frac{\frac{R}{2}}{\left(1 + \frac{R}{2}\right)^k} + \frac{1}{\left(1 + \frac{R}{2}\right)^N} \right] - \frac{1}{\left(1 + \frac{R}{2}\right)^N} \\ &= \frac{\bar{R} - R}{\left(1 + \frac{R}{2}\right)} + 2 - \frac{1}{\left(1 + R\right)^N} \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\frac{dP}{dR} = -\frac{1 + \frac{\bar{R}}{2}}{\left(1 + \frac{R}{2}\right)^2} + \frac{N/2}{\left(1 + \frac{R}{2}\right)^{N+1}} \quad (3.36)$$

如果 $\bar{R} = R$ ，则：

$$\frac{-\frac{dP}{dR}}{P} = \frac{1}{1 + \frac{R}{2}} \left[\frac{1 - \frac{N/2}{\left(1 + \frac{R}{2}\right)^N}}{2 - \frac{1}{\left(1 + R\right)^N}} \right] \quad (3.37)$$

从这个式子可以看出，双倍浮动利率债券的久期是负值，我们第一次看到一个债券的久期是负值。久期为正，利率的上升将会导致价格下降；久期为负，利率的上升将会导致价格上升。普通债券的久期是正值，浮动利率债券的久期接近零，双倍浮动利率债券的久期为负值。下面用一个例子来比较它们的取值。

例 3.8 当前参考利率是 6%，简单债券的收益率也是 6%，所有债券的到期日都为 10 年，则可以计算出：

债券	久期
双倍浮动利率债券	-3.05
浮动利率债券	0.49
平价债券	7.44
零付息债券	9.71

本章小结

本章研究了债券的风险,引入了久期和凸度两个风险度量指标,讨论了它们的性质、计算方法及其在风险管理中的应用。重要的概念和公式有:

(1) 债券的久期为:

$$D = -\frac{dP}{dy}/P$$

它反映了收益率的单位变化导致价格的变化率。也相当于债券的现金流的平均到达时间。

(2) 资产组合的久期等于组成资产组合的各个资产的久期的加权平均,权值是各个资产的现价。久期匹配的资产组合是指资产组合的现价、久期与目标资产的现价、久期相等。这一资产组合不仅与目标资产现价相同,在利率发生变化的情况下,两者的价值也近似相同。一旦投资者的投资期限正好等于其持有的资产组合的久期,利率的任何变化(假定利率期限结构平行移动)对投资的收益不会造成影响。

(3) 凸度的定义为:

$$\text{凸度} = \frac{\frac{d^2 P}{dy^2}}{P}$$

它反映了债券现金流的集中程度,现金流越集中,凸度越小;反之,越大。

(4) 资产组合的凸度等于资产组合中的各个证券凸度的加权平均,权值是各个证券的价值。凸度匹配的资产组合是指资产组合的现价、久期、凸度与目标资产的现价、久期、凸度相等。这样资产组合不仅与目标资产现价相同,在利率发生变化的情况下,两者的价值也近似相同。凸度还可以用在资产负债管理中,如果要使净资产的价值不受利率变化的影响,资产的价值久期应该等于负债的价值久期。特别地,如果资产和负债现值相同,资产的久期与负债的久期应该相同,进一步要使净资产价值非负,资产的凸度要大于负债的凸度。

(5) 浮动利率债券的久期相当于一期后到期的不付息债券的久期。双倍浮动利率债券具有负的久期,即利率升高,价格变大;利率降低,价格变小。

复习与思考

- 一个 10 年期的平价债券，其收益率为 6%。而另一个 10 年期债券价格是 110，息票率为 8%。还有一个债券的价格为 101，10 年零 6 个月后到期，息票率为 6%。这三个债券的面值都是 100，每半年支付一次息票。请问 10 年后开始的半年期远期利率是多少？
- 有投资者希望你帮助构造一个久期匹配的资产组合。目标资产是 20 年期的平价债券，其久期为 9.8964 年。资产组合由两个债券组成：一个是 30 年期的平价债券，其久期为 11.3117 年；另一个是一年期的远期合约，标的资产是 10 年期的平价债券，这个远期合约的远期价格是 100。所有债券都是半年支付一次息票，面值为 100。假定当前的利率期限结构是平坦的，所有到期日零息票债券的收益率都是 8%（半年复利的名义年收益率）。10 年期平价债券的久期为 6.7951 年。请问你如何构造。
- 逆向浮动利率债券的息票率随利率的增加而减少。一个逆向浮动利率债券为：在到期日前的每 6 个月支付一次利息，年息票率是 12% 减去当时的市场参考利率。比如，如果现在的市场参考利率是 8%（半年复利一次的年利率），半年后和一年后的息票率都是 $(0.12 - 0.08)/2 = 2\%$ 。假定债券发行时的市场参考利率是 6%，债券的到期日是 10 年，面值是 100。同时有三个 10 年期，面值都是 100 的固定息票率债券的久期分别为：

息票率(%)	价 格	久 期
12.00	144.63	6.5697
6.00	100.00	7.4387
0.00	55.37	9.7087

请讨论该浮动利率债券的久期和价格，并与三个 10 年期不付息债券比较久期的大小。

参考文献

- Bruce Tuckman, 1996, *Fixed Income Securities*, John Wiley & Sons, Inc..
- Frank Fabozzi, 1995, *Fixed Income Mathematics*, IRWIN Professional Publishing (Third edition), Hans R. Stoll and Robert E. Whaley, 1993, *Futures and Options*, South-Western Publishing Co..
- John Cochrane, 2001, *Asset Pricing*, Princeton University Press.
- John Cox, 1999, *Investment Banking*, MIT Transparency.
- Keith Brown and Donald Smith, 1995, *Interest Rate and Currency Swaps*, The Research Foundation of The Institute of Chartered Financial Analysis.

Oliver Grandville, 2001, *Bond Pricing and Portfolio Analysis*, The MIT Press.
Suresh M. Sundaresan, 1997, *Fixed Income Markets and Their Derivatives*,
South-Western College Publishing.

058

金融工程学

二叉树利率模型与复杂利率证券的价格、风险

第

2章和第3章在没有引入利率不确定变化模型的情况下,讨论了债券的定价、风险度量及投资、风险管理问题,但对含有期权特征的利率产品,上述方法不再适用。要想知道在利率不确定变化下,这些含有期权特征的债券的价格及其风险,首先要了解利率的不确定变化模型。本章在二叉树模型下,讨论利率的变化模型,和复杂债券的价值评价和风险管理。

4.1 债券价格的随机变化及风险中性概率

4.1-1 债券价格的随机变化

现实中,债券价格的变化是不确定的,不确定性变化的主要原因是利率的不确定变化。我们只知道今天的利率期限结构,但无法完全预测下一个时间的利率期限结构,因此也无法完全清楚明天的债券价格是多少。

例 4.1 假定有三个不付息债券,面值是 100,分别在 1, 2, 3 年后到期,根据市场价格,可以知道今天的价格分别是 90, 81, 73, 由于债券在到期日的价格一定等于面值,也可以知道债券在到期日的价格都是 100,但却无法知道在其他时点的价格。由于债券的价格取决于利率,不同债券的价格变化又有着必然的关系。一旦价格的变化超出这种必然联系,就给我们提供了套利的机会。

表 4.1 三个债券的到期日及其价格

债券名称	到期日(年)	当前价格
F	1	90
G	2	81
H	3	73

我们以这三个债券为例子,看一看它们的价格及其变化有什么联系。假定三

个债券每年末的价格取值如图 4.1 所示, 对这三个债券价格变化的假定是根据如图 4.2 所示的年利率的随机变化假定。

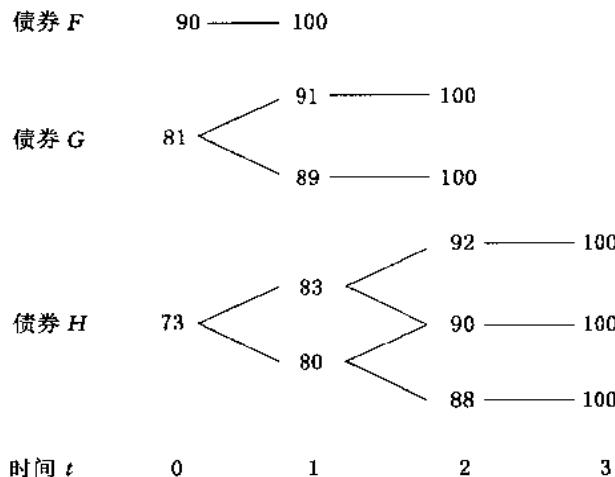
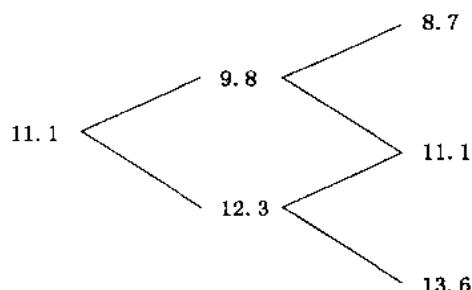


图 4.1 债券在不同时间的价格



060

金融
工程
学

图 4.2 债券价格隐含的利率变化二叉树(利率单位:%)

假定市场是高效的, 无套利机会存在。首先看这些债券的价格是否存在套利机会, 有的话, 说明债券价格变化的假定不合理, 需要修改; 没有的话, 说明价格变化模型符合无套利定价理论。

在时间 $t = 0$, 利用 F 和 H 的资产组合复制 G , 使 F 和 H 的资产组合在一年后等于 G 的价值。假定资产组合由 x 单位 F 和 y 单位 H 组成, 那么一年后的资产组合的价值一定满足:

$$100x + 83y = 91 \\ 100x + 80y = 89$$

解出得:

$$x = 0.3567$$

$$y = 0.6667$$

这个资产组合在今天的价值为：

$$0.3567 \times 90 + 0.6667 \times 73 = 80.77 \neq 81$$

也就是说，这个资产组合今天价格是 80.77，资产 G 的价格是 81，但一年后，两者的价格一样，这是一个套利机会。说明价格的假定不合理。

4.1-2 风险中性概率

现在我们撇开具体数字，来看三个一般债券 F、G 和 H 的价格变化应该满足什么条件，假定这三个债券的价格变化如图 4.3 所示。

这是一个典型的二叉树假定，假定一年后的利率有两个取值：上升和下降。利率下降时，债券的价格升高，G、H 的价格分别是 G_u 、 H_u ；利率上升时，债券的价格降低，G 和 H 的价格分别取 G_d 和 H_d 。F 是无风险资产，其收益率等于无风险利率 R。

现在我们通过 F 和 H 的资产组合来复制 G，使得一年后资产组合的价值等于资产 G 的价值。假定资产组合需要 x 单位 H 和 y 单位 F，那么一年后：

$$xH_u + yF(1+R) = G_u \quad (4.1)$$

$$xH_d + yF(1+R) = G_d \quad (4.2)$$

解方程得：

$$x = \frac{G_u - G_d}{H_u - H_d} \quad (4.3)$$

$$y = \frac{G_d H_u - G_u H_d}{(1+R)F(H_u - H_d)} \quad (4.4)$$

如果市场没有套利机会，资产组合的现价一定等于 G 的现价，即：

$$xH + yF = G \quad (4.5)$$

(4.1) 式乘以一个常数 ϕ ，(4.2) 式乘以常数 θ ，然后把它们加在一起：

$$\phi x H_u + \theta x H_d + (\phi + \theta)y(1+R)F = \phi G_u + \theta G_d \quad (4.6)$$

由于 $yF = G - xH$ ，所以：

$$x[\phi H_u + \theta H_d - (\phi + \theta)(1+R)H] = \phi G_u + \theta G_d - (\phi + \theta)(1+R)G \quad (4.7)$$

再把 $x = \frac{G_u - G_d}{H_u - H_d}$ 代入(4.7)式得：

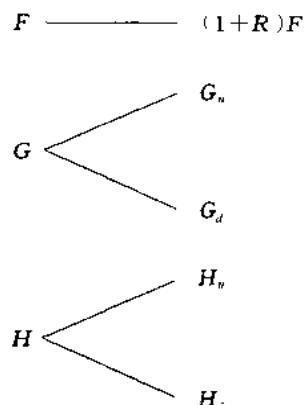


图 4.3 债券价格变化
的二叉树

$$\begin{aligned} \frac{\phi H_u + \theta H_d - (\phi + \theta)(1 - R)H}{H_u - H_d} &= \lambda \\ &= \frac{\phi G_u + \theta G_d - (\phi + \theta)(1 + R)G}{G_u - G_d} \quad (4.8) \end{aligned}$$

可以看出(4.8)式中的 λ 对任何证券都是一样的,因为我们假定 G 和 H 是任何价格只依赖于利率的证券,只是这里为简便起见,忽略了利息的支付。由(4.8)式得:

$$\phi H_u + \theta H_d - (\phi + \theta)(1 - R)H = \lambda(H_u - H_d) \quad (4.9)$$

$$\left(\frac{\phi - \lambda}{\phi + \theta}\right)H_u + \left(\frac{\theta + \lambda}{\phi + \theta}\right)H_d - (1 + R)H = 0 \quad (4.10)$$

记

$$p = \frac{\phi - \lambda}{\phi + \theta} \quad (4.11)$$

$$1 - p = \frac{\theta + \lambda}{\phi + \theta} \quad (4.12)$$

债券今天的价格与下一个时间的价格有关系:

$$H = \frac{pH_u + (1 - p)H_d}{1 + R} \quad (4.13)$$

(4.13)式对所有的价格只依赖于利率的证券都成立(没有考虑到息票的支付)。这里 p , $1 - p$ 对所有的证券都一样,并且都是非负值。如果它们有一个是负的话,就可能导致一个证券今天的价格是负值,但将来有正的,至少是非负的支付,也就是市场存在套利机会。因此 p 可以看成是概率,证券今天的价格可以看成是下一个时间的价格在这个概率下的期望值以无风险利率折现。这个概率也被形象地称为风险中性概率。

上面的推导没有考虑利息的支付,其实很多证券在到期日前是有利息支付的。假定证券 H 在下一个时间的利息有两个可能不同的取值,利率下降时,利息是 C_u ,利率上升时,利息是 C_d 。利用同样的推导方法,证券 H 在两个时间的价格存在关系:

$$H = \frac{p(H_u + C_u) + (1 - p)(H_d + C_d)}{1 + R} \quad (4.14)$$

这是一个对所有价格只依赖于利率的证券都成立的等式,不管这个债券是普通的债券,还是一个含有期权的复杂利率衍生证券。

再返回开头讲的例子,现在可以知道,如果市场无套利机会,存在一个风险中性概率 p ,证券 F 、 G 、 H 在时间 $t = 0$ 的价格可以看成时间 $t = 1$ 的价格在概率 p 下的期望值以无风险利率折现。

由 F 的价格可以知道无风险利率:

$$R = (100 - 90)/90 = 11.1\%$$

由 G 的价格变化可以计算出风险中性概率：

$$\frac{p \times 91 + (1-p) \times 89}{1+R} = 81$$

解出 p 的取值为：

$$p = 0.4955$$

应用 p , 通过 H 在 $t=1$ 时间的价格计算 H 现在的无套利价格：

$$\frac{0.4955 \times 83 + (1 - 0.4955) \times 80}{1.111} = 73.345$$

由于今天的价格是 73, 而不是 73.345, 存在一个套利机会。但我们已经假定了市场无套利机会, 套利机会的产生只能说明时间 1 时 H 的价格假定不合理, 也就是过高了。为了使它与今天的价格相一致, 可以减去一个 x , x 应满足:

$$\frac{0.4955 \times (83 - x) + (1 - 0.4955) \times (80 - x)}{1.111} = 73$$

解出 x 的取值为:

$$x = 0.383$$

现在我们知道了, 要使三个债券的价格变化没有套利机会, H 的价格变化应该如图 4.4 所示。

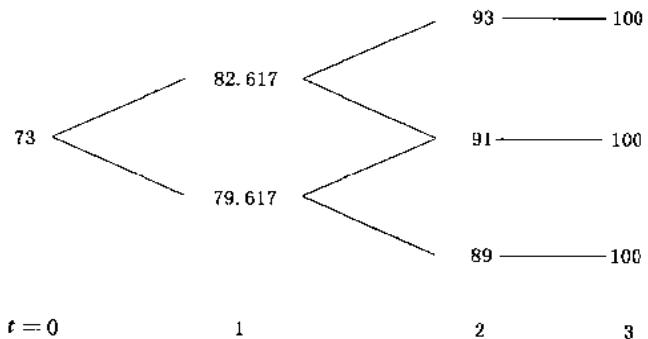


图 4.4 无套利下债券 H 价格变化的二叉树

4.2 风险中性利率模型之一: Ho-Lee 模型

这一节介绍利率变化的 Ho-Lee 模型, 它是由霍(Ho)、李(Lee)两人在 1986 年给出的。它的出现对企界产生了很大的影响。在此之前的利率模型如 Vasicek 模型(1977)和 CIR 模型(1982)等被人们称为均衡模型, 它们不能很好地反映利率期限结构及其变化。Ho-Lee 模型吸收前面模型的优点, 并且可以通过选取

参数的取值而与当前的市场利率期限结构完全一致,因此 Ho-Lee 模型也叫无套利模型,在 Ho-Lee 模型之后,又出现了很多无套利利率模型,如 Black-Derman-Toy 模型(1990),Heath-Jarrow-Morton 模型(1992),Hull-White 模型(1990,1993)。利率模型是金融理论在企业界应用成功的典范。本节在二叉树模型下介绍 Ho-Lee 模型。

4.2-1 二叉树下的一些记号

为了进一步考察利率的不确定性变化,和由此导致的利率证券的不确定性变化,我们在二叉树的框架下来描述利率和证券的价格变化,并引进一些记号。

i :经济状态参数。由于我们采取的是二叉树描述方式,经济状态的每次变化有两种可能结果:“上升”和“下降”。在时间 0,经济状态是已知的,记为 0,“上升”导致经济状态参数增加 1;“下降”导致经济状态参数减少 1。

t :时间参数。现在的时间一般用 $t = 0$ 来代表。

经济状态随时间变化如图 4.5 所示。

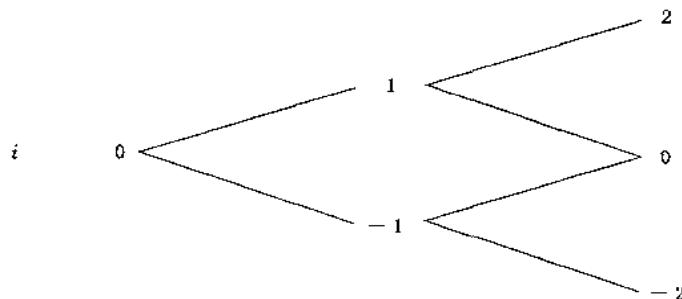


图 4.5 经济状态随时间变化的二叉树

记:

$Z_{i,j}$:在时间 $t = j$ 到期的,面值为 1 的债券的现价;

$P_{i,j}$:在时间 $t = j+1$ 到期的,面值为 1 的债券在时间 $t = j$,状态 i 下的价格;

$F_{i,j}$:债券 F 在时间 $t = j$,状态 i 下的付息后的价格;

$C_{i,i+1,j+1}$:债券在时间 $t = j+1$,状态 $i+1$ 下的利息,债券在时间 $t = j$ 时处于状态 i ;

$C_{i,i+1,j+1}$:债券在时间 $t = j+1$,状态 $i-1$ 下的利息,债券在时间 $t = j$ 时处于状态 i 。

债券在相邻两个时间点的价格具有关系:

$$F_{i,j} = P_{i,j} [p_{i,j}(F_{i+1,j+1} + C_{i+1,j}) + (1 - p_{i,j})(F_{i-1,j+1} + C_{i-1,j+1})] \quad (4.15)$$

债券价格是下一个时间点债券价值(包括价格和息票)期望值的折现,这里 $p_{i,j}$ 是风险中性概率,它可能与时间 $t = j$ 和状态 i 有关,但与证券无关。 $P_{i,j}$ 是以无风险利率折现的折现因子,即:

$$P_{i,j} = 1/(1+R_j)$$

其中 R_j 是时间 j 状态 i 下的无风险利率,它把下一个时间的价值折现到时间 $t = j$ 。

在本章第一节的例子中,我们知道债券的价格变化受利率变化的影响,不同债券价格变化具有相互关系。由于债券价格变化取决于利率的变化,利率模型是我们认识债券不确定性变化的关键。

4.2-2 Ho-Lee 模型

通过国债市场,我们可以知道利率的期限结构,即可以知道一系列不付息债券的价格(Z_1, Z_2, \dots, Z_N),再假定通过合理的估计方法还可以知道短期即期利率的波动率参数 σ ,波动率参数的具体定义在后面给出。记:

R_t :时间 t 从时间 t 到 $t+1$ 的即期利率。为简化,假定一个时间单位是一年,这里的即期利率就是实质年利率(effective interest rate for one year)。

r_t :时间 t 以连续复利表示的从时间 t 到 $t+1$ 的即期利率,它与实质年利率有关系:

$$r_t = \ln(1+R_t) \quad (4.16)$$

在构造利率模型时,一般考虑的是连续复利利率,因为在构造利率模型时,未来即期利率的取值可以认为是当前利率的取值,加上一个变化的部分,这个变化一方面反映了利率期限结构的变化,另一方面也反映了利率的随机波动。利率相加对连续复利利率具有明确的金融意义,但对于离散复利利率的金融意义却并不明显。

今天的即期利率是已知的,但下一个时间的即期利率是不确定的,Ho-Lee 模型假定 $t=1$ 时的即期利率与今天的即期利率有关系:

$$r_1 = r_0 + b_1 + \sigma \epsilon_1 \quad (4.17)$$

其中 r_0 是今天的即期利率, b_1 反映的是利率期限结构的变化, $\sigma \epsilon_1$ 反映了时间 $t=1$ 时即期利率的随机变化部分, σ 是波动率, ϵ_1 是服从二项分布的随机变量。 ϵ_1 的分布为:

$$\epsilon_1 = \begin{cases} 1 & \text{概率 } \frac{1}{2} \\ -1 & \text{概率 } \frac{1}{2} \end{cases} \quad (4.18)$$

对上述利率的变化用二叉树表示,如图 4.6 所示。

现在知道时间 $t=1$ 时,利率有两个等可能的取值 $r_0 + b_1 + \sigma$, $r_0 + b_1 - \sigma$ 。如

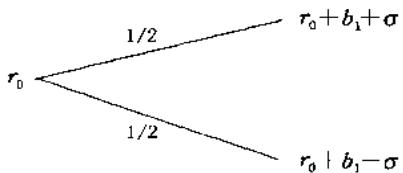


图 4.6 利率变化的单周期二叉树

果要想知道 $t = 2$ 时利率的取值，我们就以 $t = 1$ 时利率的取值作为出发点，时间 $t = 2$ 时利率的取值为：

$$r_2 = r_1 + b_2 + \sigma \varepsilon_2 \quad (4.19)$$

其中 b_2 反映了当前的利率期限结构， $\sigma \varepsilon_2$ 反映了利率的不确定性变化， ε_2 仍是服从二项分布(4.18)的随机变量。

如果 $t = 1$ 时利率的取值是 $r_0 + b_1 + \sigma$ ， r_2 的取值为：

$$\begin{aligned} r_2 &= r_0 + b_1 + \sigma + b_2 + \sigma \varepsilon_2 \\ &= r_0 + (b_1 + b_2) + \sigma + \sigma \varepsilon_2 \end{aligned} \quad (4.20)$$

如果利率的取值是 $r_0 + b_1 - \sigma$ ， r_2 的取值为：

$$\begin{aligned} r_2 &= r_0 + b_1 - \sigma + b_2 + \sigma \varepsilon_2 \\ &= r_0 + (b_1 + b_2) - \sigma + \sigma \varepsilon_2 \end{aligned} \quad (4.21)$$

r 随时间变化用二叉树表示，如图 4.7 所示。

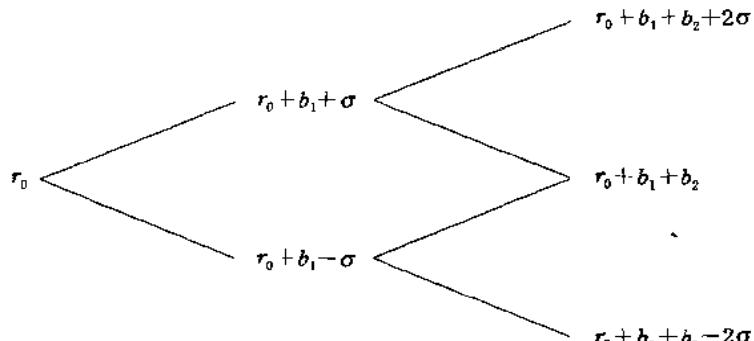


图 4.7 利率变化的两周期二叉树

记：

$$\begin{aligned} m_0 &= r_0 \\ m_1 &= r_0 + b_1 \\ m_2 &= r_0 + b_1 + b_2 \end{aligned}$$

则

$$P_{0,0} = e^{-m_0} \quad (4.22)$$

$$P_{i,j} = e^{-(m_j + \sigma^2)} \quad (4.23)$$

定义 4.1 Ho-Lee 模型: 在风险中性下的二叉树模型中, 假定:

$$P_{i,j} = \frac{1}{2} \text{(即概率都是 } 1/2) \quad (4.24)$$

$$P_{i,j} = \exp(-\sigma i - m_j) \quad (4.25)$$

其中: σ 是波动率参数; m_j 的取值由当前的利率期限结构决定。

下面再来推导 Ho-Lee 模型中参数 m_j 的取值公式。由利率的期限结构, 可以知道一系列不付息的, 面值是 1 的债券的价格为 (Z_1, Z_2, \dots, Z_N) 。由 Z_1 的取值可以导出 m_0 的取值:

$$Z_1 = P_{0,0} = \exp(-m_0) \quad (4.26)$$

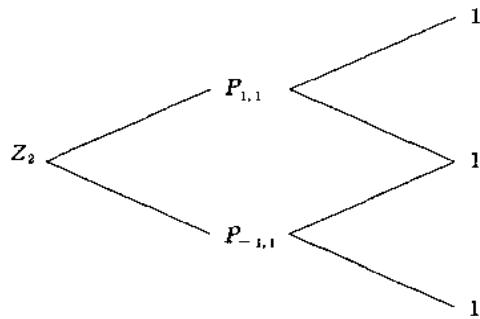


图 4.8 Z_2 价格变化的二叉树

Z_2 的价格变化的二叉树如图 4.8 所示, 其现价可以看成到期日的现金流在风险中性概率下以无风险利率折现到 $t=0$, 即:

$$\begin{aligned} Z_2 &= P_{0,0} \left(\frac{1}{2} P_{1,1} + \frac{1}{2} P_{-1,1} \right) \\ &= Z_1 \left[\frac{1}{2} \exp(-\sigma - m_1) + \frac{1}{2} \exp(\sigma - m_1) \right] \quad (4.27) \\ &= \exp(-m_1) Z_1 \left[\frac{1}{2} \exp(-\sigma) + \frac{1}{2} \exp(\sigma) \right] \end{aligned}$$

可以导出 m_1 的取值:

$$\exp(-m_1) = (Z_2/Z_1) \left[\frac{1}{2} \exp(-\sigma) + \frac{1}{2} \exp(\sigma) \right]^{-1} \quad (4.28)$$

Z_3 的价格也可以看成是到期日的现金流的期望值, 在风险中性概率下以无风险利率折现的折现值。 Z_3 的价格变化的二叉树如图 4.9 所示。价格由 $P_{i,j}$ 表达出来为:

$$Z_3 = P_{0,0} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} P_{2,2} + \frac{1}{2} P_{0,2} \right) P_{1,1} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} P_{0,2} + \frac{1}{2} P_{-2,2} \right) P_{-1,1} \right]$$

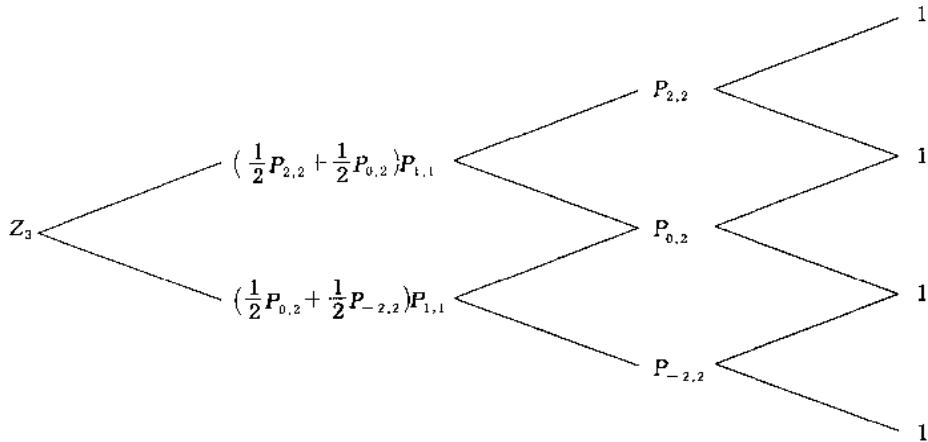


图 4.9 Z_3 价格变化的二叉树

$$\begin{aligned}
 &= \exp(-m_0) \left\{ \frac{1}{2} \exp(-\sigma - m_1) \left[\frac{1}{2} \exp(-2\sigma - m_2) + \frac{1}{2} \exp(-m_2) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \exp(\sigma - m_1) \left[\frac{1}{2} \exp(-m_2) + \frac{1}{2} \exp(2\sigma - m_2) \right] \right\} \\
 &= \exp(-m_0) \exp(-m_1) \exp(-m_2) \\
 &\quad \cdot \left[\frac{1}{4} \exp(-3\sigma) + \frac{1}{4} \exp(-\sigma) + \frac{1}{4} \exp(\sigma) + \frac{1}{4} \exp(3\sigma) \right] \\
 &= \exp(-m_2) Z_1 \left(\frac{Z_2}{Z_1} \right) \left[\frac{1}{2} \exp(-\sigma) + \frac{1}{2} \exp(\sigma) \right]^1 \\
 &\quad \cdot \left[\frac{1}{4} \exp(-3\sigma) + \frac{1}{4} \exp(-\sigma) + \frac{1}{4} \exp(\sigma) + \frac{1}{4} \exp(-3\sigma) \right]
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

068

金融工程学

求出 m_2 的取值为：

$$\exp(-m_2) = (Z_3/Z_2) \left[\frac{1}{2} \exp(-2\sigma) + \frac{1}{2} \exp(2\sigma) \right]^{-1} \tag{4.30}$$

最后经过归纳可以得出 $\exp(-m_j)$ 和 $P_{i,j}$ 的一般表达式为：

$$\exp(-m_j) = (Z_{j+1}/Z_j) \left[\frac{1}{2} \exp(-\sigma j) + \frac{1}{2} \exp(\sigma j) \right]^{-1} \tag{4.31}$$

$$\begin{aligned}
 P_{i,j} &= \exp(-m_j - \sigma i) \\
 &= (Z_{j+1}/Z_j) \left[\frac{1}{2} \exp(-\sigma j) + \frac{1}{2} \exp(\sigma j) \right]^{-1} \exp(-\sigma i)
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

定理 4.1 在 Ho-Lee 模型中, 参数 $P_{i,j}$ 的取值为:

$$\begin{aligned}
 P_{i,j} &= \exp(-m_j - \sigma i) \\
 &= (Z_{j+1}/Z_j) \left[\frac{1}{2} \exp(-\sigma j) + \frac{1}{2} \exp(\sigma j) \right]^{-1} \exp(-\sigma i)
 \end{aligned}$$

有一点要特别说明的是, Ho-Lee 模型是一个风险中性模型, 概率 1/2 是风险中性概率, 模型不是对现实世界的真实描述, 但利用它计算出的债券价格和风险大小却不因为风险中性的假定而改变。

4.3 Ho-Lee 模型的应用

应用 Ho-Lee 模型, 要知道当前的利率期限结构和利率的波动率参数, 利率的波动率参数在后面再作讨论。Ho-Lee 模型首先可以告诉我们债券的现价, 可以告诉我们债券的价格变化, 另外 Ho-Lee 模型还可以告诉我们债券的风险大小及怎样进行风险管理。本节只关心债券的定价问题, 然后讨论波动率大小对利率模型的影响。

4.3-1 Ho-Lee 模型的应用

下面通过例子说明用 Ho-Lee 模型怎样确定利率模型和债券价格的变化。

例 4.2 在本章的第 1 节中, 债券 F 、 G 、 H 的价格分别是 90、81、73, 由它们可以知道面值是 1 的分别在 1、2、3 年后到期的不付息债券的价格分别是:

$$Z_1 = 0.90, \quad Z_2 = 0.81, \quad Z_3 = 0.73$$

再假定利率的年波动率是 $\sigma = 0.012$, 根据 Ho-Lee 模型可以求出 $P_{i,j}$ 的取值为:

$$P_{0,0} = 0.90$$

$$P_{1,1} = (0.81/0.90) \left[\frac{1}{2} \exp(-0.012) + \exp(0.012) \right]^{-1} \exp(-0.012) \\ = 0.8892$$

$$P_{-1,1} = (0.81/0.90) \left[\frac{1}{2} \exp(-0.012) + \exp(0.012) \right]^{-1} \exp(0.012) \\ = 0.9108$$

$$P_{2,2} = (73/81) \left[\frac{1}{2} \exp(-0.024) + \exp(0.024) \right]^{-1} \exp(-0.024) \\ = 0.8796$$

$$P_{0,2} = (73/81) \left[\frac{1}{2} \exp(-0.024) + \exp(0.024) \right]^{-1} \\ = 0.9010$$

$$P_{-2,2} = (73/81) \left[\frac{1}{2} \exp(-0.024) + \exp(0.024) \right]^{-1} \exp(0.024) \\ = 0.9229$$

用二叉树表示折现因子 $P_{i,j}$ 的取值如图 4.10 所示。

我们一般喜欢用实质年利率来表示利率, 年利率和 $P_{i,j}$ 的关系为:

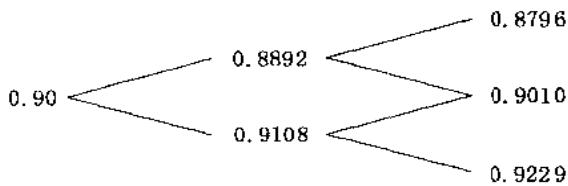


图 4.10 $P_{t,t}$ 的二叉树图

$$R_{t,t} = 1/P_{t,t} - 1$$

实质年利率的二叉树如图 4.11 所示。

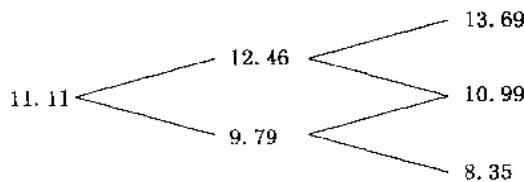


图 4.11 实质年利率变化的二叉树图

知道利率的变化，自然就可以知道债券 F、G、H 的价格变化，其二叉树如图 4.12 所示。

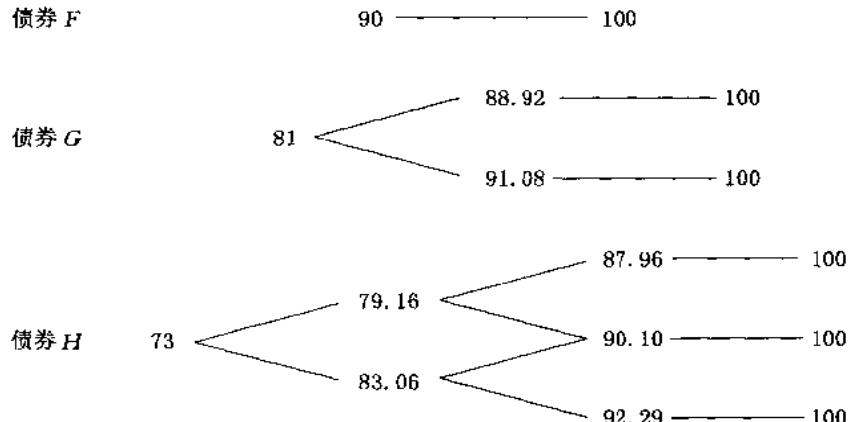


图 4.12 Ho-Lee 模型下债券 F, G, H 价格变化的二叉树

4.3-2 波动率参数的影响

在 Ho-Lee 模型中，利率的取值取决于利率的期限结构和利率的波动率参数。下面我们来看一看波动率参数是怎样影响利率的取值的。

例 4.3 如果仍假定 $Z_1 = 0.90$, $Z_2 = 0.81$, $Z_3 = 0.73$, 但假定利率的波动率参数为 $\sigma = 0.018$, 根据 Ho-Lee 模型:

$$P_{0,t} = 0.90$$

$$\begin{aligned}
 P_{1,1} &= (0.81/0.90) \left[\frac{1}{2} \exp(-0.018) - \exp(0.018) \right]^{-1} \exp(-0.018) \\
 &= 0.8838 \\
 P_{1,-1} &= (0.81/0.90) \left[\frac{1}{2} \exp(-0.018) - \exp(0.018) \right]^{-1} \exp(0.018) \\
 &= 0.9162 \\
 P_{2,2} &= (73/81) \left[\frac{1}{2} \exp(-0.036) + \exp(0.036) \right]^{-1} \exp(-0.036) \\
 &\approx 0.8688 \\
 P_{0,2} &= 0.9006 \\
 P_{-2,2} &= 0.9337
 \end{aligned}$$

再由此计算出实质年利率, 利率的二叉树如图 4.13 所示。

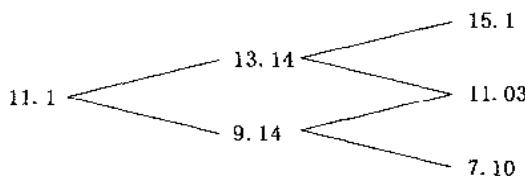


图 4.13 $\sigma = 0.018$ 下实质年利率的二叉树

与 $\sigma = 0.012$ 下的利率二叉树相比较, 利率在上升的时候, 利率的取值更大, 利率下降的时候, 利率的取值更小, 直观地反映出利率波动幅度较前例更大。

4.4 复杂利率证券的价格

一旦知道了利率变化模型, 就可以确定任何价格只依赖于利率的证券的价值和风险, 不管是简单的证券, 还是复杂的具有嵌入期权的证券。特别是对于后者, 其现金流的取值依赖于将来的利率, 现金流是不确定的, 只有知道了利率变化模型, 其价值和风险才能够确定。

下面通过一些例子讨论复杂利率证券价格的确定方法。

例 4.4 一个两年期的浮动利率证券, 每年付息一次, 息票率由当期的一年期利率确定, 但息票率的上限是 10%, 一旦当期利率超过上限 10%, 按 10% 的息票率支付当期利息。假定利率模型还是在上一节所假设的波动率参数 $\sigma = 0.012$ 下, 根据 Ho-Lee 模型计算出的二叉树模型。

首先由利率变化的 Ho-Lee 模型可以计算出这个浮动利率债券的现金流, 其现金流如图 4.14 所示。

然后再计算这些现金流的现值。先计算 $t = 1$ 时, 浮动利率债券的价格:

$$F_{1,1} = P_{1,1} \left[\frac{1}{2} (C_{1,2,2} + F_{2,2}) + \frac{1}{2} (C_{1,0,2} + F_{0,2}) \right]$$

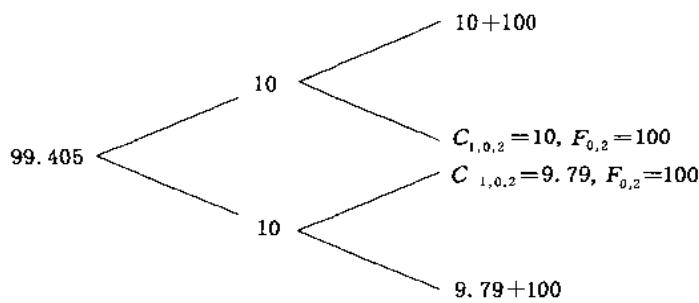


图 4.14 息票率具有上限的浮动利率债券的现金流

$$\begin{aligned}
 & = 0.8892 \left[\frac{1}{2}(10+100) + \frac{1}{2}(10+100) \right] \\
 & = 98.70 \\
 F_{-1,1} & = P_{-1,1} \left[\frac{1}{2}(C_{1,0,2} + F_{0,2}) + \frac{1}{2}(C_{-1,-2,2} + F_{-2,2}) \right] \\
 & = 0.9108 \left[\frac{1}{2}(9.79+100) + \frac{1}{2}(9.79+100) \right] \\
 & = 100
 \end{aligned}$$

然后再计算 $t=0$ 时，浮动利率债券的价格：

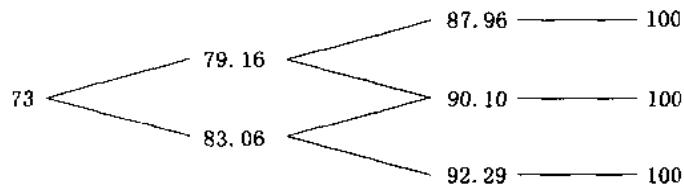
$$\begin{aligned}
 F_{0,0} & = P_{0,0} \left[\frac{1}{2}(C_{0,1,1} + F_{1,1}) + \frac{1}{2}(C_{0,-1,1} + F_{-1,1}) \right] \\
 & = 0.90 \left[\frac{1}{2}(10+98.70) + \frac{1}{2}(10+100) \right] \\
 & = 98.505
 \end{aligned}$$

再看另外一个例子：

例 4.5 以 H 为标的两年后到期的欧式期权 Q ，执行价是 90。也就是说期权持有者可以在两年后执行期权，从而以 90 元的价格购买债券 H 。当然债券的持有者也可以选择不执行期权，期权就会因为到期而失效。期权会不会执行取决于债券 H 在期权到期日的价格。如果价格大于 90，期权就会被执行，因为执行期权对期权持有者是有利的；反之，如果债券 H 的价格小于 90，期权就不会被执行，执行期权还不如以市场价购买债券 H ，因此期权就会失效。由于在期权到期日债券 H 的价格是不确定的，期权的现金流也是不确定的，要想确定期权的价格，必须先确定利率的变化模型。利率的变化模型同上例，相应的债券 H 的二叉树如图 4.15 所示。

期权 Q 在到期日的价格有三种可能，分别是：

$$\begin{aligned}
 Q_{2,2} & = \max(H_{2,2} - 90, 0) \\
 & = \max(87.96 - 90, 0) \\
 & = 0 \\
 Q_{0,2} & = \max(H_{0,2} - 90, 0)
 \end{aligned}$$

图 4.15 债券 H 价格变化的二叉树图

$$\begin{aligned}
 &= \max(90.10 - 90, 0) \\
 &= 0.10 \\
 Q_{0,2} &= \max(H_{-2,2} - 90, 0) \\
 &= \max(92.29 - 90, 0) \\
 &= 2.29
 \end{aligned}$$

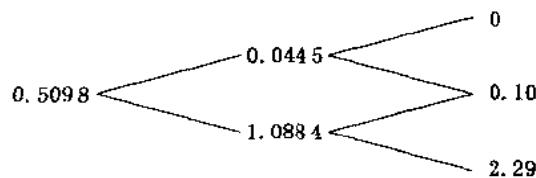
由 $t = 2$ 时的价格可以计算出期权在时间 $t = 1$ 时的价格：

$$\begin{aligned}
 Q_{1,1} &= P_{1,1} \left(\frac{1}{2} Q_{2,2} + \frac{1}{2} Q_{0,2} \right) \\
 &= 0.8892 \left(\frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 0.10 \right) \\
 &= 0.0445 \\
 Q_{-1,1} &= P_{-1,1} \left(\frac{1}{2} Q_{0,2} + \frac{1}{2} Q_{-2,2} \right) \\
 &= 0.9108 \left(\frac{1}{2} \times 0.10 + \frac{1}{2} \times 2.29 \right) \\
 &= 1.0884
 \end{aligned}$$

由 $t = 1$ 时的价格可以计算出期权在时间 $t = 0$ 的价格：

$$\begin{aligned}
 Q_{0,0} &= P_{0,0} \left(\frac{1}{2} Q_{1,1} + \frac{1}{2} Q_{-1,1} \right) \\
 &= 0.90 \left(\frac{1}{2} \times 0.0445 + \frac{1}{2} \times 1.0884 \right) \\
 &= 0.5098
 \end{aligned}$$

期权 Q 价格变化的二叉树如图 4.16 所示。

图 4.16 期权 Q 价格变化的二叉树

4.5 复杂衍生证券的风险

提起风险，人们就想起波动率(volatility)这个名词，它度量了单位时间某种资产的波动幅度。我们经常说，某种股票的年波动率是20%，它代表在正常的情况下，股票的随机波动导致股票的变化在±20%之间。在离散时间下，波动率的标准定义为：资产在下一个时间单位连续复利回报率的标准差。

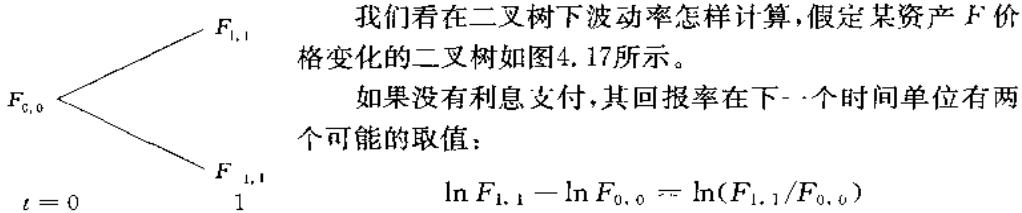


图4.17 资产价格变化 和
的二叉树

$$\ln F_{-1,1} - \ln F_{0,0} = \ln(F_{-1,1}/F_{0,0})$$

回报率的方差为：

$$\begin{aligned} V^2 &= \frac{1}{2} \left\{ \ln(F_{1,1}/F_{0,0}) - \left[\frac{1}{2} \ln(F_{1,1}/F_{0,0}) + \frac{1}{2} \ln(F_{-1,1}/F_{0,0}) \right] \right\}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \ln(F_{-1,1}/F_{0,0}) - \left[\frac{1}{2} \ln(F_{1,1}/F_{0,0}) + \frac{1}{2} \ln(F_{-1,1}/F_{0,0}) \right] \right\}^2 \\ &= \left[\frac{1}{2} |\ln F_{1,1} - \ln F_{-1,1}| \right]^2 \end{aligned} \quad (4.33)$$

回报率的标准差，即资产的波动率为：

$$V = \frac{1}{2} |\ln F_{1,1} - \ln F_{-1,1}| \quad (4.34)$$

与资产回报率相应的是时间 $t=1$ 开始的单位时间的利率。利率的取值也有两种可能：

$$\ln 1 - \ln P_{1,1} = -\ln P_{1,1}$$

和

$$\ln 1 - \ln P_{-1,1} = -\ln P_{-1,1}$$

利率波动的标准差，也即波动率为：

$$\frac{1}{2} |\ln P_{1,1} - \ln P_{-1,1}| \quad (4.35)$$

资产 F 的久期为：

$$\begin{aligned}
 D &= -\frac{\frac{dF}{dr}}{F} = -\frac{d(\ln F)}{dr} \\
 &\approx \frac{\Delta \ln F}{\Delta r} \\
 &= \frac{\ln F_{1,1} - \ln F_{-1,1}}{\ln P_{1,1} - \ln P_{-1,1}}
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

即资产 F 的久期为

$$D = \frac{\ln F_{1,1} - \ln F_{-1,1}}{\ln P_{1,1} - \ln P_{-1,1}} \tag{4.37}$$

(4.37)式说明,资产 F 的久期等于资产 F 的波动率除以利率的波动率。也说明波动率和久期具有关系:

资产的波动率 = 利率变动的标准差 × 资产的久期

在 Ho-Lee 模型中,短期利率的波动率是:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} |\ln P_{1,1} - \ln P_{-1,1}| \\
 &= \frac{1}{2} |\ln \exp(-\sigma - m_1) - \ln \exp(\sigma + m_1)| \\
 &= \sigma
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

说明波动率参数 σ 就是一年期即期利率的波动率。

在 Ho-Lee 模型下,一个在时间 n 到期,面值是 1 的不付息债券 F 在时间 j ,状态 i 下的价格为:

$$F_{i,j} = (Z_n/Z_j) D_j \exp[-\sigma i(n-j)] \tag{4.39}$$

其中:

$$D_j = \prod_{k=j}^{n-1} \frac{\frac{1}{2} \exp[-\sigma(n-k-1)] + \frac{1}{2} \exp[\sigma(n-k-1)]}{\frac{1}{2} \exp(-\sigma k) + \frac{1}{2} \exp(\sigma k)}$$

由此可以计算出 n 年期不付息债券的波动率为:

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \frac{1}{2} |\ln F_{1,1} - \ln F_{-1,1}| \\
 &= \frac{1}{2} |\ln((Z_n/Z_1) D_1 \exp[-\sigma(n-1)] \\
 &\quad - \ln(Z_n/Z_1) D_1 \exp[\sigma(n-1)])| \\
 &= \sigma(n-1)
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

不付息债券的久期为:

$$D = \frac{\sigma(n-1)}{\sigma} = n-1 \quad (4.41)$$

这里计算出的久期是 $n-1$, 而不是 n , 原因在于我们一直假定 1 年为一个单位时间而导致的计算误差, 如果时间区间较短, 上述误差也就很小了。

由于波动率和久期一般以年为单位, 如果在利率模型中假定的时间区间不是 1 年, 而是 k 年 (一般 $k < 1$), 有关资产或利率的波动率、久期等参数应该使用这个假定时间单位的波动率, 它们与年波动率、年久期参数的换算关系为:

- (1) 波动率乘以 $k^{3/2}$;
- (2) 年久期除以 k 。

4.6 可赎回债券、可卖回债券的价格和风险

4.6-1 可赎回债券的价格与风险

复杂利率衍生证券形式多样, 这里我们主要介绍可赎回债券(callable bond)和可卖回债券(putable bond)。

可赎回债券在发行时, 写明发行者可以在一段时间以后, 在到期日之前按一定价格提前收回债券, 这个价格一般略高于面值。可赎回债券和一般债券比较, 发行者多了一个提前赎回的权利, 这个权利是有利于债券发行者的, 发行者可以提前赎回债券, 也可以不提前赎回债券。如果将来利率下降, 债券价格上升, 价格高于赎回价, 发行者就会把债券赎回, 因为发行者这时可以以更便宜的价格筹集到资金。反之, 如果将来的利率升高, 债券价格下降, 发行者不会提前赎回债券。由于可赎回权对发行者非常有利, 与一般债券相比, 债券只有以更低的价格才能发行出去。

为了介绍可赎回债券, 我们从一般债券讲起。

例 4.6 一个债券的面值是 100, 3 年后到期, 每年付息一次, 息票率是 10%。我们仍利用本章开始时例子中的利率期限结构和波动率 $\sigma = 0.012$ 下的 Ho-Lee 利率模型。债券的现价是

$$\begin{aligned} P &= 10Z_1 + 10Z_2 + 110Z_3 \\ &= 10 \times 0.90 + 10 \times 0.81 + 110 \times 0.73 \\ &= 97.4 \end{aligned}$$

债券价格变化的二叉树如图 4.18 所示。

假定上述债券具有可赎回权, 赎回价是 101, 债券发行者可以以 101 的价格随时赎回债券。显然, 当债券价格高于 101 时, 发行者会马上执行赎回权, 当债券价格小于 101 时, 发行者不会执行可赎回权。其价格以如下方式确定:

在到期日价格一定是 100, 可赎回权不会发挥作用, 即

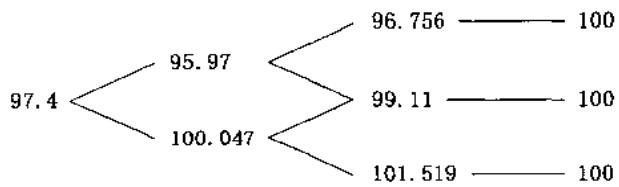


图 4.18 可赎回债券价格变化的二叉树

$$F_{i,3} = \min(101, 100) = 100 \quad i = -3, -1, 1, 3$$

时间 $t = 2$ 时, 把将来现金流的现值与可赎回权的执行价进行比较, 取两者的最小值, 即

$$F_{2,+2} = \min\left\{101, P_{2,+2}\left[\frac{1}{2}(F_{3,+3} + C_{2,+3}) + \frac{1}{2}(F_{1,+3} + C_{2,-1,+3})\right]\right\}$$

$$= \min[101, 0.8796(100+10)]$$

$$= \min(101, 96.756)$$

$$= 96.756$$

$$F_{0,+2} = \min\left\{101, P_{0,+2}\left[\frac{1}{2}(F_{1,+3} + C_{0,+1,+3}) + \frac{1}{2}(F_{-1,+3} + C_{-1,0,+3})\right]\right\}$$

$$= \min[101, 0.9010(100+10)]$$

$$= \min(101, 99.110)$$

$$= 99.110$$

$$F_{-2,+2} = \min\left\{101, P_{-2,+2}\left[\frac{1}{2}(F_{-2,-3,+3} + C_{-2,-3,+3}) + \frac{1}{2}(F_{-2,-1,+3} + C_{-2,-1,+3})\right]\right\}$$

$$= \min[101, 0.9229(100+10)]$$

$$= \min(101, 101.519)$$

$$= 101$$

时间 $t = 1$ 时的价格为:

$$F_{1,+1} = \min\left[101, 0.8892\left(\frac{1}{2}96.756 + \frac{1}{2}99.110 + 10\right)\right]$$

$$= \min(101, 95.974)$$

$$= 95.974$$

$$F_{-1,+1} = \min\left[101, 0.9108\left(\frac{1}{2}101 + \frac{1}{2}99.11 + 10\right)\right]$$

$$= \min(101, 100.238)$$

$$= 100.238$$

时间 $t = 0$ 时的价格为：

$$\begin{aligned} F_{0,0} &= \min\left[101, 0.90\left(\frac{1}{2}100.238 - \frac{1}{2}95.974 + 10\right)\right] \\ &= \min(101, 97.295) \\ &= 97.295 \end{aligned}$$

债券价格变化的二叉树如图 4.19 所示。

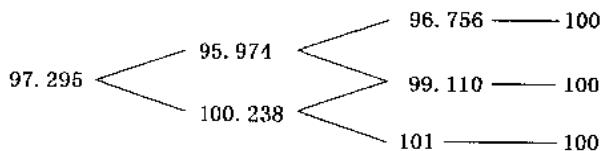


图 4.19 可赎回债券价格变化的二叉树

可赎回债券的价格小于债券的价格，两者之差是：

$$97.4 - 97.295 = 0.105$$

我们还可以从另外一个角度理解可赎回债券。任何复杂债券都可以分解成普通债券和期权的组合。可赎回债券可以看成是一个 3 年后到期的一般债券，和一个执行价格是 101，以普通债券为标的的美式期权的空头。这个美式期权的价格正好是两个债券价格之差 0.105。

现在再来看可赎回债券的风险，主要比较可赎回债券和普通债券的风险差别。为方便比较，假定一个普通债券 30 年后到期，面值 100，息票率 8%，半年付息一次。可赎回债券的赎回价是 105，可以在到期前的任何时间赎回债券，其他同普通债券一样。假定利率的期限结构是平坦的，不同到期日的不付息债券具有相同的收益率，利率的年波动率是 0.01。利率模型通过 Ho-Lee 模型计算。在不同的收益率下，普通债券和可赎回债券的价格与久期见表 4.2。图 4.20 给出价格和收益率的关系。

表 4.2 30 年期普通债券与可赎回债券的价格、久期

收益率(%)	普通债券的价格	普通债券的久期	可赎回债券的价格	可赎回债券的久期
5.00	146.36	14.33	105.00	0.00
6.00	127.68	13.39	103.43	3.41
7.00	112.47	12.50	98.67	6.00
8.00	100.00	11.66	92.37	7.48
9.00	89.68	10.87	85.59	8.28
10.00	81.07	10.13	78.94	8.56
11.00	73.83	9.46	72.74	8.54

资料来源：J. Cox, *Investment Banking*, MIT transparency。

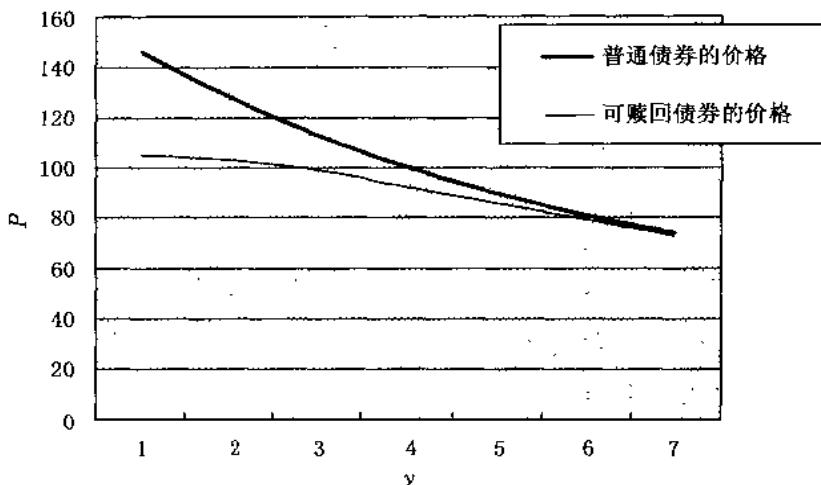


图 4.20 可赎回债券、普通债券的价格与收益率的关系比较

4.6-2 可赎回债券的价格与风险

可赎回债券在发行时,写明债券持有者可以在一段时间以后,在到期日之前按一定价格提前把债券卖回给发行者,这个价格一般略低于面值。可赎回债券和一般债券比较,投资者多了一个提前卖回的权利,这个权利是有利的,持有者可以提前卖回债券,也可以不提前卖回债券。如果将来利率上升,债券价格下降,价格低于卖回价,投资者就会把债券卖回给发行者。反之,如果将来的利率下降,债券价格上升,投资者不会提前卖回债券。由于可卖回权对投资者非常有利,与普通债券相比,债券的价格更高。

例 4.7 在例 4.6 中,假定债券可赎回权改为可卖回权,债券持有者可以以价格 98 在债券到期前任何时候把债券卖回给发行者。首先看一下这个债券的合理价格。

在到期日,可卖回债券的价格为:

$$F_{1,3} = \max(98, 100) = 100 \quad i = -3, -1, 1, 3$$

在时间 $t=2$ 时,债券的价格为:

$$\begin{aligned} F_{2,2} &= \max \left\{ 98, P_{2,2} \left[\frac{1}{2}(F_{3,3} + C_{2,3,3}) + \frac{1}{2}(F_{1,3} + C_{2,1,3}) \right] \right\} \\ &= \max[98, 0.8796(100+10)] \\ &= \max(98, 96.756) \\ &= 98 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{0,2} &= \max \left\{ 98, P_{0,2} \left[\frac{1}{2}(F_{1,3} + C_{0,1,3}) + \frac{1}{2}(F_{-1,3} + C_{-1,0,3}) \right] \right\} \\
 &= \max [98, 0.9010(100+10)] \\
 &= \max(98, 99.110) \\
 &= 99.110
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{-2,2} &= \max \left\{ 98, P_{-2,2} \left[\frac{1}{2}(F_{-2,-3,3} + C_{-2,-3,3}) + \frac{1}{2}(F_{-2,-1,3} + C_{-2,-1,3}) \right] \right\} \\
 &= \max [98, 0.9229(100+10)] \\
 &= \max(98, 101.519) \\
 &= 101.519
 \end{aligned}$$

在时间 $t=1$ 时, 债券的价格为:

$$\begin{aligned}
 F_{1,1} &= \max \left[98, 0.8892 \left(\frac{1}{2}98 + \frac{1}{2}99.110 + 10 \right) \right] \\
 &= \max(98, 96.527) \\
 &= 98
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{-1,1} &= \max \left[98, 0.9108 \left(\frac{1}{2}101.519 + \frac{1}{2}99.110 + 10 \right) \right] \\
 &= \max(98, 100.474) \\
 &= 100.474
 \end{aligned}$$

最后求出债券的现价为

$$\begin{aligned}
 F_{0,0} &= \max \left[98, 0.90 \left(\frac{1}{2}100.474 + \frac{1}{2}98 + 10 \right) \right] \\
 &= \max(98, 98.313) \\
 &= 98.313
 \end{aligned}$$

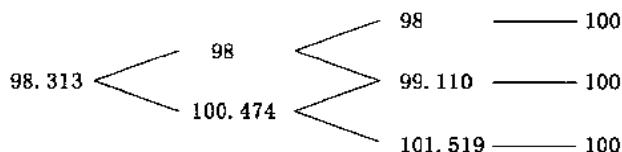


图 4.21 可卖回债券价格变化的二叉树

可卖回债券的价格大于一般债券的价格,两者之差是:

$$98.313 - 97.4 = 0.913$$

可卖回债券可以看成是一个3年后到期的一般债券,和一个执行价格是98以一般债券为标的的美式卖出期权。这个美式期权的价格正好是两个债券价格之差0.913。

现在再来看可卖回债券的风险,主要比较可卖回债券和普通债券的风险差别。为方便比较,假定一个普通债券30年后到期,面值100,息票率8%,半年付息一次。可卖回债券的卖回价是95,可以在到期前的任何时间卖回债券,其他同普通债券一样。假定利率的期限结构是平坦的,不同到期日的不付息债券具有相同的收益率,利率的年波动率为0.01。利率模型通过Ho-Lee模型计算。在不同的收益率下,普通债券和可卖回债券的价格、久期见表4.3,图4.22给出价格和收益率的关系。

表4.3 30年期普通债券与可卖回债券的价格、久期

收益率(%)	普通债券 的价格	普通债券 的久期	可卖回债券 的价格	可卖回债券 的久期
5.00	146.36	14.33	149.95	13.30
6.00	127.68	13.39	132.37	11.88
7.00	112.47	12.50	118.63	10.29
8.00	100.00	11.66	108.15	8.42
9.00	89.68	10.87	100.67	6.96
10.00	81.07	10.13	96.19	2.92
11.00	73.83	9.46	95.00	0.00

资料来源:同表4.2。

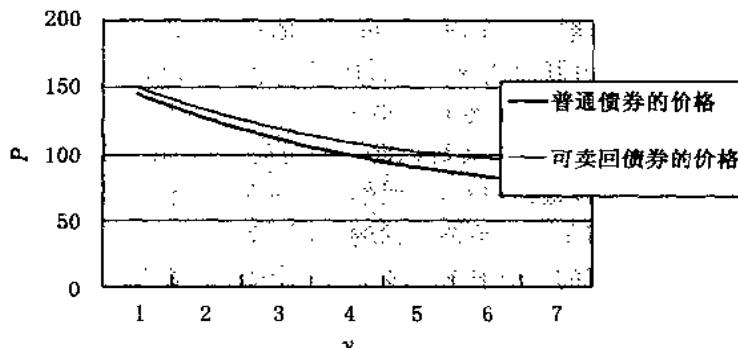


图4.22 可卖回债券价格、普通债券价格与收益率的关系比较

本章小结

本章在二叉树模型下讨论了利率、债券价格的不确定性变化,重点介绍了Ho-Lee模型,以及在Ho-Lee模型下复杂债券的价值评价和风险大小评价度量。重要概念和公式有:

- (1) Ho-Lee模型是一个风险中性模型,风险中性概率为:

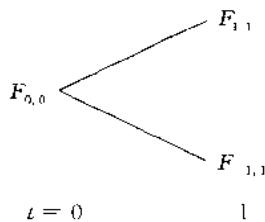
$$P_{i,j} = \frac{1}{2} \text{ (即概率都是 } 1/2)$$

折现因子为：

$$\begin{aligned} P_{i,j} &= \exp(-m_i - \sigma i) \\ &= (Z_{i+1}/Z_i) \left[\frac{1}{2} \exp(-\sigma j) + \frac{1}{2} \exp(\sigma j) \right]^{-1} \exp(-\sigma i) \end{aligned}$$

其中 σ 是短期利率的波动率。

(2) 在二叉树模型下,金融资产的波动率定义为:资产在下一个时间区间连续复利回报率的标准差。假定资产 F 的价格变化为:



其波动率的计算公式为:

$$V = \frac{1}{2} [\ln F_{1,1} - \ln F_{1,-1}]$$

(3) 可赎回债券指发行者可以在一段时间以后,在到期日之前按一定价格提前收回的债券,赎回价一般略高于面值。可赎回债券和一般债券比较,发行者多了一个提前赎回的权利。可赎回债券可以看成是一个资产组合:一个没有赎回权的一般债券的多头和一个美式看涨期权的空头。

(4) 可卖回债券指债券持有者可以在一段时间以后,在到期日之前按一定价格提前把债券卖回给发行者的债券,卖回的价格一般略低于面值。可卖回债券和一般债券比较,投资者多了一个提前卖回的权利。可卖回债券可以看成是一个资产组合:一个没有卖回权的一般债券的多头和一个美式看跌期权的多头。

复习与思考

- 面值为 100, 分别在 1, 2, 3 年后到期的不付息债券的价格为 90, 80, 70, 再假定 1 年期利率的波动率为 0.01, 请用 Ho-Lee 模型构造 3 期利率变化模型。
- 利用第 1 题构造的利率模型定价一个 3 年期浮动利率债券, 浮动利率债券的面值为 100, 每年支付一次利息, 但利息的上限不超过本金的 14%。
- 假定你是第 2 题中的浮动利率债券的发行者, 你想对冲这个浮动利率债券的风险, 可供利用的证券有两个:一个是 3 年期不付息债券, 另一个是 1 年期不付息债券, 你应该怎样构造你的资产组合? 资产组合应该怎样进行动态调整?

4. 假定一个债券同时具有赎回权和卖回权,它于3年后到期,到期的面值为100,每年支付一次利息,息票率为8%,刚发行时赎回价为103,卖回价为96,但赎回价和卖回价每年减少1元,即1年后的赎回价是102,2年后的赎回价是101。卖回价也是如此变化。请确定这个债券的价格。

参考文献

- Black F. , Derman E. and Toy W. A. , 1990, "One-Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options," *Financial Analyst Journal* , (1):33—39.
- Bruce Tuckman, 1996, *Fixed Income Securities* , John Wiley & Sons, Inc. .
- Frank Fabozzi, 1995, *Fixed Income Mathematics* , IRWIN Professional Publishing (Third edition).
- Hans R. Stoll and Robert E. Whaley, 1993, *Futures and Options* , South-Western Publishing Co. .
- Heath D. Jarrow R. A. and A. J. Morton, 1992, "Contingent Claim Valuation with a Random Evolution of Interest Rate: A New Methodology for Contingent Claims Valuation," *Econometrica* , 60:77—105.
- Hull J. C. and White A. D. , 1993, "One-Factor Interest Rate Models and Valuation of Interest-Rate Derivative Securities," *Journal of Financial and Quantitative Analysis* , 28:235--254.
- John Cochrane, 2001, *Asset Pricing* , Princeton University Press.
- John Cox, 1999, *Investment Banking* , MIT Transparency.
- Keith Brown and Donald Smith, 1995, *Interest Rate and Currency Swaps* , The Research Foundation of The Institute of Chartered Financial Analysis.
- Oliver Grandville, 2001, *Bond Pricing and Portfolio Analysis* , The MIT Press.
- Suresh M. Sundaresan, 1997, *Fixed Income Markets and Their Derivatives* , South-Western College Publishing.

常见的利率模型及实证分析

本

章对常见的利率模型作一个较系统的介绍,包括 Vasicek 模型,CIR 模型,Ho-Lee 模型,Black-Derman-Toy 模型及多因子利率模型等。采用离散时间,连续状态的表述方式,这种表述方式利于利率模型的实证分析。如果读者对时间序列分析较熟悉,则对模型的金融含义能更好把握。

5.1 利率期限结构

5.1-1 连续复利即期利率、远期利率

假定债券现在的价格是 P_t , 经过一段时间, 在时间 T 的价格是 P_T , 债券中间没有利息支付, 以 $R(t, T)$ 代表债券的实质年收益率(effective rate of return compounded annually), 其取值为:

$$R(t, T) = (P_T/P_t)^{\frac{1}{T-t}} - 1$$

如果把它转换为连续复利的年收益率, 以 $y_t^{(T-t)}$ 表示, 应为:

$$y_t^{(T-t)} = \frac{1}{T-t} (\ln P_T - \ln P_t) \quad (5.1)$$

连续复利年利率小于离散时间复利的年利率, 这可以通过以下例子看出。

例 5.1 假定一个平价债券面值为 100, 1 年后到期, 息票率为 12%, 年付息一次, 在不同的复利方式下, 其收益率如表 5.1 所示。

假定在时间 t 签订的以债券为标的的远期合约, 在时间 u 交割债券, 但债券在交割后瞬间到期, 到期日为 $u + dt$, 债券在到期日价值为 1, 记交割价为 k , 以 $f(t, u)$ 表示这个远期合约隐含的连续复利年收益率, 则

$$f(t, u) = \frac{\ln 1 - \ln k}{(u + dt) - u}$$

$f(t, u)$ 也叫时间 u 的瞬间远期利率, 如果市场无套利机会, 一定有:

表 5.1 不同复利次数下的名义年收益率

年复利次数	名义年收益率(%)
1	12
2	11.660
4	11.495
12	11.387
365	11.335
∞	11.333

$$P_T = P_t \exp\left(\int_t^T f(t, u) du\right) \quad (5.2)$$

再结合(5.1)式,得:

$$y_t^{(T-t)} = \frac{\int_t^T f(t, u) du}{T-t} \quad (5.3)$$

由(5.2)、(5.3)式,远期利率也可以用不付息债券的价格或收益率来表达:

$$\begin{aligned} f(t, u) &= \frac{d}{du} (\ln P_u - \ln P_t) \\ &= \frac{d \ln P_u}{du} \end{aligned} \quad (5.4)$$

或

$$\begin{aligned} \int_t^T f(t, u) du &= y_t^{(T-t)} (T-t) \\ f(t, u) &= y_t^{(u-t)} + (u-t) \frac{dy_t^{(u-t)}}{du} \end{aligned} \quad (5.5)$$

在时间 t 时,国债价格隐含的利率期限结构一般用时间 t 时开始的各种不同到期日的不付息债券的收益率表示。

5.1-2 利率期限结构的估计方法

在第2章,我们已经讨论了怎样通过普通债券的价格找出当前的利率期限结构,但是在某一天来看,债券的付息日不一定是半年后,也不一定存在着各种到期日的债券,在这种情况下第2章的方法不再适用,因此必须寻找别的方法来估计利率的期限结构。由于利率期限结构的重要性,已经出现很多从国债的价格估计利率期限结构的模型方法。方法分两大类:第一类是参数估计方法,第二类是样条插值方法。比较著名的广为应用的几个模型为1987年的尼尔森—西古(Nelson and Siegel)参数估计模型,1994年的斯文森(Svensson)参数估计模型,1995年费歇尔—

尼卡·司扶司(Fisher-Nychka-Zervos)样条插值模型,1999年安德森—斯里司(Anderson-Sleath)样条插值模型。在这里只介绍一种方法:尼尔森—西古参数估计模型。尼尔森—西古模型有一个优点,需要估计的参数最少,在债券数量不大时,也可以做得比较准确,适合中国债券市场的实际情况。

1987年尼尔森和西古通过对远期利率期限结构的形状的研究,给出了远期利率的一个模型。在这个模型中,通过选取适当的参数,可以得到市场上观测到的利率期限结构的各种形状。远期利率模型为:

$$f(t, T) = \beta_0 + \beta_1 e^{-(T-t)/\tau_1} + \frac{\beta_2}{\tau_1} (T-t) e^{-(T-t)/\tau_1} \quad (5.6)$$

$f(t, T)$ 表示时间 t 时,将来时间 T 时的以连续复利表示的瞬时远期利率, β_0 , β_1 , β_2 , τ_1 是 4 个要估计的参数。根据远期利率求出从时间 t 到时间 T 的以连续复利表示的即期利率(单位是年利率)为:

$$\begin{aligned} y_t^{(T-t)} &= \frac{\int_t^T f(t, u) du}{T-t} \\ &= \beta_0 + (\beta_1 - \beta_2) \frac{\tau_1}{T-t} (1 - e^{-T/\tau_1}) - \beta_2 e^{-(T-t)/\tau_1} \end{aligned} \quad (5.7)$$

假定在时间 t ,债券 B_i^i ($i = 1, 2, \dots, I$) 在交易所交易,交易价格记为 B_i^i ,其现金流(包括利息和本金)在时间 T_1, T_2, \dots, T_n 支付,支付的数量分别为 $c_{T_1}^i, c_{T_2}^i, \dots, c_{T_n}^i$ 。债券的交易价格应该等于其现金流的折现值,利用时间 t 的利率期限结构,交易价格和现金流有关系:

$$\begin{aligned} B_i^i &= c_{T_1}^i \exp[-y_t^{(T_1-t)} \times (T_1-t)] + c_{T_2}^i \exp[-y_t^{(T_2-t)} \times (T_2-t)] \\ &\quad + \cdots + c_{T_n}^i \exp[-y_t^{(T_n-t)} \times (T_n-t)] \end{aligned} \quad (5.8)$$

在债券市场上,有多种国债在交易,通常无法选取参数 $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau_1$ 的值使(5.8)式对每一个债券都成立,通常的做法是选取 $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau_1$ 的估计值使每一个债券的交易价格和其现金流的折现值尽量接近。可以选取参数的值使得债券的交易价格与其现金流的折现值的差别的平方和最小,即 $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau_1$ 的估计值可以通过求解下面的最优化问题得到:

$$\begin{aligned} \inf_{\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau_1} & \sum_{i=1}^I (B_i^i - \{c_{T_1}^i \exp[-y_t^{(T_1-t)} \times (T_1-t)] \\ & + c_{T_2}^i \exp[-y_t^{(T_2-t)} \times (T_2-t)] + \cdots \\ & + c_{T_n}^i \exp[-y_t^{(T_n-t)} \times (T_n-t)]\})^2 \end{aligned} \quad (5.9)$$

估计出每一个时间点的参数 $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau_1$,就可以通过(5.7)式计算出利率的期限结构。

在我国上海证券交易所进行国债交易已有 10 年左右的时间,交易的品种包括

现货交易、国债回购以及早期的国债期货等。但交易所交易的国债市场还较小，债券品种较少，都是中期债券。提到当前的市场利率，人们还习惯于以银行储蓄存款利率作标准。但随着市场规模的扩大，交易活跃程度的提高，以及投资者的日趋理性，交易所交易的国债市场隐含的利率期限结构将很大程度上代表当前的市场利率。作为投资者，自然要关心国债隐含的利率期限结构及其变化，从而制定有效的投资和风险管理策略；政策制定者也要研究、了解当前的债券利率期限结构及其变化，从而制定相应的政策来影响利率的变化和走向。研究利率的期限结构及其变化还可以揭示经济变量和利率变化的关系。下面将利用尼尔森—西古模型和上面提到的参数估计方法，估计出上海交易所交易债券市场上的利率期限结构。考虑到交易所交易的长期债券较少，我们只给出1至5年期利率，利率期限结构如图5.1所示。

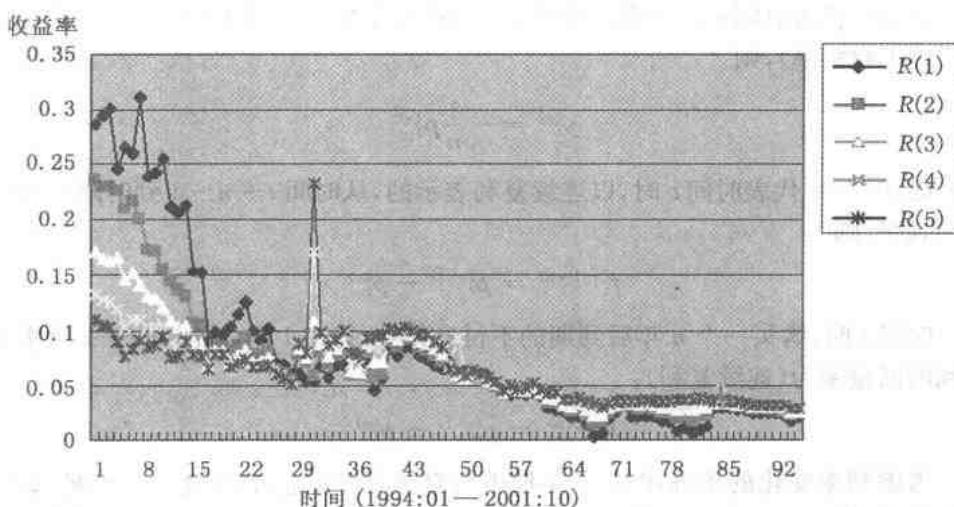


图 5.1 上交所国债交易价格隐含的利率期限结构

注： $R(s)$ 代表 $y_t^{(s)}$, $s = 1, 2, 3, 4, 5$ 。

从图5.1可以看出，上海交易所交易的债券市场上，债券隐含的利率期限结构有两种典型的情况：1996年以前，短期利率高于长期利率，表现出一个典型的逆向利率期限结构 (an inverted yield curve)；1996年以后，长期利率高于短期利率，表现为一个上升的利率期限结构 (a rising yield curve)。这与我们的一般认识一致：1996年前，我国有一定的通货膨胀，1年期银行存款利率在高的时候将近10%，但债券交易者预期到这种高利率不会一直持续下去，利率将会下跌，因此长期债券收益率低于短期债券收益率。而在1994年，债券1年期利率竟达到25%以上，远远高于储蓄存款利率，之后逐步走低，到1996年，1年期利率接近于5年期利率，然后变得低于5年期利率。5年期利率则一直低于10%，逐步下降，表现比较稳定。

5.2 利率期限结构与预期理论

5.2-1 预期理论

首先引进一些记号：

以 $P_t^{(n)}$ 代表在时间 t 时，一个 n 年后到期的，面值是 1 的，不付息债券的价格。其自然对数记为 $p_t^{(n)}$ ，即

$$p_t^{(n)} = \ln(P_t^{(n)})$$

以 $y_t^{(n)}$ 代表时间 t 时， n 年后到期的，不付息债券的收益率（以连续复利表示，单位是年收益率），则

$$y_t^{(n)} = -\frac{1}{n} p_t^{(n)}$$

以 $f_t^{(n-1 \rightarrow n)}$ 代表时间 t 时，以连续复利表示的，从时间 $t+n-1$ 到时间 $t+n$ 的远期利率，则

$$f_t^{(n-1 \rightarrow n)} = p_t^{(n-1)} - p_t^{(n)}$$

时间 t 时，购买一个 n 年后到期的不付息债券，持有 1 年，在时间 $t+1$ 时卖掉，得到的回报率为（连续复利）：

$$hpr_{t+1}^{(n)} = p_{t+1}^{(n-1)} - p_t^{(n)}$$

考虑利率变化的不确定性， n 年期不付息债券的收益率不同于 1 年期不付息债券的收益率 ($n \geq 2$)，如果以 1 年期不付息债券的收益率作为无风险利率，那么 n 年期不付息债券的超额收益率为：

$$hprx_{t+1}^{(n)} = hpr_{t+1}^{(n)} - y_t^{(1)}$$

对于利率，人们关心的基本问题是利率应该怎样变化，在现有信息下将来利率的期望值及其波动率，这也是我们构造资产组合、进行利率风险管理、对利率衍生证券进行定价及探讨利率变化背后的经济动因的核心问题。关于利率变化的经济学解释，传统理论有三个，分别是预期假设、流动性假设和市场分割假设。从现代金融理论来看，这三个假设中，只有预期假设与无套利定价理论不矛盾，因此我们只考虑预期假设，预期假设的三种等价形式为：

(1) N 期利率等于短期即期利率的平均值的期望，但考虑到风险的不同，还要加上一个风险金，即

$$y_t^{(N)} = \frac{1}{N} E_t(y_t^{(1)} + y_{t+1}^{(1)} + y_{t+2}^{(1)} + y_{t+3}^{(1)} + \dots + y_{t+N-1}^{(1)}) + \text{风险金}$$

(5.10)

(2) 远期利率等于未来即期利率的期望值,另外,由于两者的风险不同,两者还可能相差一个风险金,即

$$f_t^{(N \rightarrow N+1)} = E_t(y_{t+N}^{(1)}) + \text{风险金} \quad (5.11)$$

其中 $f_t^{(N \rightarrow N+1)}$ 是时间 t 时,从时间 $t+N$ 到时间 $T+N+1$ 的远期利率。

(3) 不同到期日债券的回报率的期望值等于当前的短期利率。但考虑长期债券具有较高的风险,两者相差一个风险金。即

$$E_t(hpr_{t+N}^{(1)}) = y_t^{(1)} + \text{风险金} \quad (5.12)$$

在连续复利的表示形式下,三者是等价的。因此要考察预期理论能否解释一个国债市场的债券价格及利率表现,我们只需要检验其中一个预期假设。预期理论的本质含义为:不同债券的预期回报率可能不同,但其预期回报率等于当前短期利率加上一定的风险回报,除此之外,没有其他因素可以预测债券的回报率。预期理论与资本市场效率理论也是相符的,在高效的资本市场上,债券价格反映了有关价格的所有信息,价格由于两种原因才会发生变化:新的有关价格、利率的信息的到达和无信息的交易行为,而这两种变动都是不可预测的。如果现有信息能够帮助我们预测回报率的变化,市场就可能不是高效的,预期理论也不可能成立。

5.2-2 预期理论的实证

法玛和布利斯(Fama and Bliss, 1987)考察了在美国国债市场上,利率期限结构能否提供一些国债回报率的信息。他们采用如下回归方程:

$$hprx_{t+1}^{(n)} = a + b(f_t^{(n-1 \rightarrow n)} - y_t^{(1)}) + \epsilon_{t+1} \quad (5.13)$$

如果回归方程的系数 b 显著不为 0,说明当前的远期利率(利率期限结构的另一种表达形式)可以用来预测债券的回报率。预期理论论不成立。利用中国上海证券交易所债券市场的利率期限结构对(5.13)式进行回归,回归结果如表 5.2 所示。

表 5.2 长期债券的超额回报率对远期利率的回归结果

债券的到期日 ($t+1$)	$f_t^{(n-1 \rightarrow n)} - y_t^{(1)}$		
	b	$\sigma(b)$	R^2
2	0.171 589	0.043 341	0.163 825
3	0.237 435	0.043 079	0.275 217
4	0.511 031	0.061 005	0.467 278
5	0.818 57	0.095 317	0.479 679

注: $\sigma(b)$ 是回归系数 b 的样本标准差。

从表 5.2 可以看出,4 个不同到期日的债券的回归系数 b 都显著不为 0。这说明远期利率对同样日期到期日的债券在下一个阶段的回报率具有显著的预测价值。在上海交易所交易的债券市场上,预期理论不成立。

既然当前的利率期限结构可以预测债券下一阶段超额回报率的变化,人们自然就关心当前的利率期限结构对将来的短期利率的预测能力如何。比如当前的远期利率是否能够预测将来同样日期的即期利率,这相当于预期理论的第2种形式。为了考察远期利率是否能够预测即期利率的变化,构造回归方程为:

$$y_{t+n-1}^{(1)} - y_t^{(1)} = a + b(f_t^{(n-1 \rightarrow n)} - y_t^{(1)}) + \epsilon_{t+n-1} \quad (5.14)$$

如果回归系数不为0,说明远期利率可以预测短期利率的变化;如果回归系数为0,远期利率不能预测短期利率的变化。回归结果如表5.3。根据预期假设的第2种表示形式,远期利率等于将来即期利率的期望值加上一个风险金,回归系数应该是1。但实证结果显示,尽管远期利率可以明显地预测即期利率,但回归系数b明显地小于1,在此再次证明了预测理论不完全成立。

表5.3 短期利率的变化与远期利率的关系

n	b	$f_t^{(n-1 \rightarrow n)} - y_t^{(1)}$	R^2
2	0.828 411	0.043 341	0.820 357
3	0.679 38	0.033 188	0.860 382
4	0.679 38	0.033 188	0.791 211
5	0.462 896	0.031 776	0.791 865

注: $\sigma(b)$ 是回归系数b的样本标准差。

5.3 金融资产定价理论和基本的利率模型

090

金融工程学

5.3-1 折现因子

初学利率和债券定价理论者一定会感到有如此多的定价理论和利率模型。实际上,所有定价理论可以用一个定价模型来概括,这就是折现因子模型,这在第1章已经谈过了。下面再来叙述一下折现因子模型。

在离散时间下,时间 t 的取值为0,1,2,...,如果资本市场无套利机会,一定存在折现因子 m_t , $t=1,2,3,\dots$,金融资产在时间 t 的价格 P_t 与其在下一个时间 $t+1$ 的价值,包括价格 P_{t+1} 和利息 C_{t+1} ,有关系(John Cochrane, 2001, pp. 63—77):

$$P_t = E_t[m_{t+1}(P_{t+1} + C_{t+1})] \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (5.15)$$

用收益率表达,关系为:

$$1 = E_t[m_{t+1}(1 + R_{t+1})] \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (5.16)$$

其中

$$R_{t+1} = P_{t+1}/P_t - 1$$

对一个 $t+n$ 年后到期的、面值为 1 的不付息债券, 它在时间 t 的价格为:

$$P_t^{(n)} = E_t(m_{t+1}m_{t+2}\cdots m_{t+n}) \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.17)$$

由(5.17)式可知, 债券的价格、利率及其变化完全由折现因子确定。

5.3-2 基本利率模型——Vasicek 模型

自从霍和李第一次给出无套利定价利率模型以来, 学术界和工业界沿着这一思路作了大量的工作, 出现了很多无套利定价利率模型。这些利率模型都试图从部分资产的价格判断其他资产的价格。本节先给出一个基本的利率模型, 它可以认为是一个 Vasicek 模型, 尽管它比较简单, 但在后面可以看出, 更复杂的利率模型仍采用它的基本框架。

仍采用前面的记号:

现在的时间记为 t , 记 $P_t^{(n)}$ 是面值为 1 的、 n 年后到期的、不付息债券的现价, 其连续复利的年收益率记为 $y_t^{(n)}$, 即

$$y_t^{(n)} = -\frac{1}{n} \ln P_t^{(n)}$$

从时间 $t+n$ 到时间 $t+n+1$ 的远期利率为:

$$f_t^{(n \rightarrow n+1)} = \ln P_t^{(n)} - \ln P_t^{(n+1)}$$

短期利率记为 r_t , 则

$$r_t = y_t^{(1)} = f_t^{(0 \rightarrow 1)}$$

我们利用折现因子法确定债券的价格和利率。折现因子的取值由经济状态确定, 因此首先要描述经济状态的变化, 假定经济状态的变化可以用单个因子描述, 其动态变化为:

$$z_{t+1} = \varphi z_t + (1-\varphi)\delta + \epsilon_{t+1} \quad (5.18)$$

其中 $\{\epsilon_t\}$ 相互独立, 服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$, 其数学期望为 0, 方差为 σ^2 。当 $\varphi = 1$ 时, 经济状态 z_t 的变化服从随机走动; 当 $\varphi < 1$ 时, 经济状态服从均值回复过程, 数学期望和方差分别为:

$$\begin{aligned} E(z_t) &= \delta \\ \text{var}(z_t) &= \sigma^2 / (1 - \varphi) \end{aligned}$$

而在时间 t 时的条件期望和方差为:

$$E_t(z_{t+1}) = \varphi z_t + (1-\varphi)\delta$$

$$\text{var}_t(z_{t+1}) = \sigma^2$$

经济状态的变化决定了折现因子的取值,假定折现因子与经济状态变量的关系为:

$$-\ln m_{t+1} = z_t + \lambda \varepsilon_{t+1} \quad (5.19)$$

(5.19)式有一个新的参数 λ ,它称为单位风险的市场价格,因为它决定了债券价格的风险特征。

在时间 t 看来, $-\ln m_{t+1}$ 服从正态分布,其数学期望和方差为:

$$\begin{aligned} E_t(-\ln m_{t+1}) &= z_t \\ \text{var}_t(-\ln m_{t+1}) &= (\lambda\sigma)^2 \end{aligned}$$

从时间 t 看,折现因子 m_{t+1} 服从对数正态分布,其数学期望为:

$$E_t[m_{t+1}] = \exp(-z_t + (\lambda\sigma)^2/2)$$

对时间 $t+1$ 到期的,面值为 1 的债券,其现价和到期日价值的关系为:

$$P_t^{(1)} = E_t[m_{t+1}] = \exp(-z_t + (\lambda\sigma)^2/2)$$

因此,短期利率为:

$$r_t = -\ln P_t^{(1)} = -z_t + (\lambda\sigma)^2/2 \quad (5.20)$$

短期利率与状态变量差一个常数项 $(\lambda\sigma)^2/2$ 。虽然是从一个抽象的状态变量出发,但我们得出短期利率等价于状态变量,状态变量也就非常具体了。短期利率的取值也就决定了状态变量的取值,从而决定了长期利率和各种债券的价格。短期利率的方差与状态变量的方差相同,期望值为:

$$\mu = \delta - (\lambda\sigma)^2/2$$

由状态变量的动态变化方程(5.18)式,可以看出短期利率的变化服从:

$$r_{t+1} = r_t + (1 - \varphi)(\mu - r_t) + \varepsilon_{t+1} \quad (5.21)$$

这就是瓦西塞克(Vasicek) 1977 年给出的短期利率变化模型。由(5.21)式,将来时间 $t+n$ 时刻与时间 t 时刻的短期利率具有关系:

$$r_{t+n} = r_t + (1 - \varphi^n)(\mu - r_t) + \sum_{j=1}^n \varphi^{n-j} \varepsilon_{t+j} \quad n = 1, 2, \dots$$

其条件期望和条件方差分别为:

$$\begin{aligned} E_t(r_{t+n}) &= r_t + (1 - \varphi^n)(\mu - r_t) \\ (5.22) \end{aligned}$$

$$\text{var}_t(r_{t+n}) = \sigma^2 \sum_{j=1}^n \varphi^{2(n-j)} = \sigma^2 \frac{1 - \varphi^{2n}}{1 - \varphi^2}$$

下面看短期利率怎样决定长期利率的取值。记

$$M_{t, t+n} = \prod_{j=1}^n m_{t+j}$$

则

$$-\ln M_{t, t+n} = -\sum_{j=1}^n \ln m_{t+j}$$

由(5.19)式,可得:

$$-\ln M_{t, t+n} = n\delta + \left(\frac{1-\varphi^n}{1-\varphi}\right)(z_t - \delta) + \sum_{j=1}^n \left(\lambda + \frac{1-\varphi^{n-j}}{1-\varphi}\right)\epsilon_{t+j}$$

再由(5.17)式,可得:

$$-\ln P_t^{(n)} = n\delta + \left(\frac{1-\varphi^n}{1-\varphi}\right)(z_t - \delta) - \sum_{j=1}^n \left(\lambda + \frac{1-\varphi^{n-j}}{1-\varphi}\right)^2 \sigma^2 / 2$$

因此 n 期名义年利率为:

$$y_t^{(n)} = \delta + \frac{1}{n} \left(\frac{1-\varphi^n}{1-\varphi}\right)(z_t - \delta) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\lambda + \frac{1-\varphi^{n-j}}{1-\varphi}\right)^2 \sigma^2 / 2 \quad (5.23)$$

而远期利率为:

$$\begin{aligned} f_t^{(n+n+1)} &= \ln P_t^{(n)} - \ln P_t^{(n+1)} \\ &= \delta + \varphi^n (\delta - z_t) - \left(\lambda + \frac{1-\varphi^n}{1-\varphi}\right)^2 \sigma^2 / 2 \end{aligned} \quad (5.24)$$

特别的,当 $n = 0$ 时,有:

$$r_t = f_t^{(0+1)} = z_t - (\lambda\sigma)^2 / 2$$

与前面短期利率的计算结果一致。

由于状态变量比较抽象,习惯上,人们喜欢用短期利率表示长期利率和远期利率,(5.23)式和(5.24)式等价地可以写成:

$$y_t^{(n)} = \delta + \frac{1}{n} \left(\frac{1-\varphi^n}{1-\varphi}\right)(r_t - \mu) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\lambda + \frac{1-\varphi^{n-j}}{1-\varphi}\right)^2 \sigma^2 / 2 \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} f_t^{(n+n+1)} &= \ln P_t^{(n)} - \ln P_t^{(n+1)} \\ &= r_t + (1 - \varphi^n)(\mu - r_t) + \left[\lambda^2 - \left(\lambda + \frac{1-\varphi^n}{1-\varphi}\right)^2\right] \sigma^2 / 2 \end{aligned} \quad (5.26)$$

有了各期的即期利率,可以计算债券的价格和收益率。比较(5.22)式和(5.26)式,可以发现(5.26)式有一个非常直观的解释。远期利率由同期即期利率 r_{t+n} 的期望

值 E_r_{t+n} 和 $\left[\lambda^2 - \left(\lambda + \frac{1-\varphi^n}{1-\varphi}\right)^2\right]\sigma^2/2$ 相加而成。 $\left[\lambda^2 - \left(\lambda + \frac{1-\varphi^n}{1-\varphi}\right)^2\right]\sigma^2/2$ 称为风险金, 它含有 3 个参数: 短期利率变动的标准差 σ , 单位风险的价格 λ 和短期利率均值回复速度 φ 。

5.3-3 基本模型中参数的估计

假定要用基本模型描述实际中利率的变化, 必须用适当的方法估计参数的取值。在基本模型中有 4 个参数需要估计, 它们是 μ , σ^2 , φ , λ 。我们就以上海交易所债券交易价格表现出的利率期限结构为例估计这 4 个参数的取值。由(5.21)式知道 μ 是短期利率的期望值, 我们用 1 年期利率代表短期利率, 用 1 年期利率的平均值估计 μ 。由于中国债券市场利率的变化有两个不同的阶段, 1996 年 3 月以前为逆向的利率期限结构, 1996 年 4 月以后为上升的利率期限结构, 利率模型同时描述这两个阶段可能出现较大的误差, 我们就选择用基本模型来描述 1996 年 4 月后的利率期限结构, μ 的估计值为:

$$\hat{\mu} = 4.08\%$$

φ 是短期利率的一阶自相关系数[同样由(5.21)式看出]。只需要用 1 年期利率的样本观测值的一阶自相关系数去估计它, 估计值为:

$$\hat{\varphi} = 0.648$$

σ^2 是(5.21)式不确定性变化项 ϵ_{t-1} 的方差, 观测值对(5.21)式回归的标准误差即是 σ 的估计值, 估计值为:

$$\hat{\sigma} = 0.01758$$

最后还有一个参数 λ 需要估计, 它决定了利率期限结构的形状, 因为它决定了不同期限利率的差别。由(5.26)式得:

$$E(f_t^{(n \rightarrow n+1)}) = \mu + \left[\lambda^2 - \left(\lambda + \frac{1-\varphi^n}{1-\varphi}\right)^2\right]\sigma^2/2 \quad (5.27)$$

在(5.27)式中, 假定 n 的取值为 4, $E(f_t^{(4 \rightarrow 5)})$ 的样本估计值为:

$$E(\hat{f}_t^{(4 \rightarrow 5)}) = 6.01\%$$

解(5.27)式, 可以求出 λ 的估计值为:

$$\hat{\lambda} = -11.3856$$

5.4 CIR 模型

5.4-1 CIR 模型

CIR(Cox-Ingersoll-Ross)模型与 Vasicek 模型有着类似的结构,区别在于 CIR 模型是一个异方差模型。我们仍采用折现因子法导出 CIR 模型。

假定状态变量 z_t 服从“平方根过程”(square root process):

$$z_{t+1} = (1 - \varphi)\theta + \varphi z_t + \sigma z_t^{1/2} \varepsilon_{t+1} \quad (5.28)$$

此处

$$\begin{aligned} 0 < \varphi < 1 \\ (1 - \varphi)\delta > \frac{\sigma^2}{2} \\ \varepsilon_{t+1} \sim N(0, 1) \end{aligned}$$

状态变量的条件期望值为:

$$E_t(z_{t+1}) = (1 - \varphi)\theta + \varphi z_t$$

条件方差为:

$$\text{var}_t(z_{t+1}) = z_t \sigma^2$$

而期望值、方差和一阶自相关系数分别为:

$$\begin{aligned} E(z_t) &= \theta \\ \text{var}(z_t) &= \theta \sigma^2 / (1 - \varphi^2) \\ \text{cor}(z_t, z_{t+1}) &= \varphi \end{aligned}$$

从(5.28)式可以看出,在时间单位很小的情况下,状态变量的取值一般是非负的。实际上,当 z_t 很小时, z_t 变化的条件方差 $\text{var}_t(z_{t+1}) = z_t \sigma^2$ 很小, z_{t+1} 取负值的可能性也很小,但仍有取负值的可能性。如果把离散时间模型转化为连续时间模型,状态变量的取值则一定取正值。(5.28)式的这一特征是非常重要的,因为在实际中,名义利率(这里指没有剔除通货膨胀的利率,与实际利率对应)不可能取负值。后面可以看到,短期利率就等于这个状态变量 z_t 。

在 CIR 模型中,折现因子为:

$$-\ln m_{t+1} = (1 + \lambda^2/2)z_t + \lambda z_t^{1/2} \varepsilon_{t+1} \quad (5.29)$$

在时间 t 的信息下,折现因子仍服从对数正态分布,表达式中, z_t 的系数之所以选择 $1 + \lambda^2/2$,是为了使状态变量等于短期利率。由于这里给出的模型是一个单因子模型,某一个利率的取值就可以决定其他不同期限利率的取值,因此也可以选择

z_t 的系数使状态变量等于其他期限的利率。

$-\ln m_{t+1}$ 的条件数学期望和条件方差为：

$$\begin{aligned} E_t(-\ln m_{t+1}) &= (1 + \lambda^2/2) z_t \\ \text{var}_t(-\ln m_{t+1}) &= \lambda^2 z_t \end{aligned}$$

因此，短期利率为：

$$\begin{aligned} r_t &= -\ln P_t^{(1)} = -\ln E_t(m_{t+1}) \\ &= \left(1 + \frac{\lambda^2}{2}\right) z_t - \frac{\lambda^2}{2} z_t = z_t \end{aligned}$$

短期利率的变化也服从方程(5.28)，即

$$r_{t+1} = (1 - \varphi)\theta - \varphi r_t + \sigma z_t^{1/2} \epsilon_{t+1} \quad (5.30)$$

长期(n 期)不付息债券的价格与短期利率的关系为(首先猜具有这种形式)：

$$-\ln P_t^{(n)} = A_n + B_n z_t \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.31)$$

其中 A_n, B_n 只与债权的到期日 n 有关。

由于无论利率取何值，一定有 $P_t^{(0)} = 1$ ，故一定有：

$$A_0 = B_0 = 0$$

对于1期后到期的债券，其价格和短期利率具有关系：

$$P_t^{(1)} = \exp(-r_t) = \exp(-z_t)$$

因此有：

$$A_1 = 0, B_1 = 1$$

一般地，对于时间 t 时， $n+1$ 期后到期的面值为1的不付息债券，在时间 $t+1$ 有：

$$\begin{aligned} \ln m_{t+1} + \ln P_{t+1}^{(n)} &= -(1 + \lambda^2/2) z_t - \lambda z_t^{1/2} \epsilon_{t+1} - A_n - B_n z_{t+1} \\ &= -[A_n + B_n(1 - \varphi)\theta] - (1 + \lambda^2/2 + B_n \varphi) z_t \\ &\quad - (\lambda + B_n \sigma) z_t^{1/2} \epsilon_{t+1} \end{aligned}$$

$\ln m_{t+1} + \ln P_{t+1}^{(n)}$ 的条件数学期望和方差为：

$$\begin{aligned} E_t(\ln m_{t+1} + \ln P_{t+1}^{(n)}) &= -[A_n + B_n(1 - \varphi)\theta] - (1 + \lambda^2/2 + B_n \varphi) z_t \\ \text{var}_t(\ln m_{t+1} + \ln P_{t+1}^{(n)}) &= (\lambda + B_n \sigma)^2 z_t \end{aligned}$$

因此时间 t 的价格满足：

$$\begin{aligned} -\ln P_t^{(n+1)} &= -\ln E_t(m_{t+1} P_{t+1}^{(n)}) \\ &= [A_n + B_n(1 - \varphi)\theta] + [1 + \lambda^2/2 + B_n \varphi - (\lambda + B_n \sigma)^2/2] z_t \end{aligned}$$

又由：

$$-\ln P_t^{(n+1)} = A_{t+1} + B_{t+1} z_t$$

得到递推关系：

$$A_{n+1} = A_n + B_n(1-\varphi)\theta \quad (5.32a)$$

$$B_{n+1} = 1 + \lambda^2/2 + B_n\varphi - (\lambda + B_n\sigma)^2/2 \quad (5.32b)$$

只要知道 4 个参数 $\theta, \varphi, \sigma^2, \lambda$ 的取值, 就可以通过递推关系求出 A_n, B_n , 并可以通
过短期利率确定出各期利率, 进一步对债券进行定价。

5.4-2 CIR 模型参数的估计及讨论

假定要用 CIR 模型描述实际中利率的变化, 必须用适当的方法估计参数的取
值。在 CIR 模型中有 4 个参数需要估计, 它们是 $\theta, \sigma^2, \varphi, \lambda$ 。与基本模型一样, 我
们仍以上海证券交易所债券交易价格表现出的利率期限结构为例。 θ 是短期利率
的期望值, 我们用 1 年期利率代表短期利率, 用 1 年期短期利率的平均值估计 θ 。
由于中国债券市场利率的变化有两个不同的阶段, 1996 年 3 月以前为逆向的利
率期限结构, 1996 年 4 月以后为上升的利率期限结构, 利率模型同时描述这两个阶
段可能出现较大的误差, 我们就选择用基本模型来描述 1996 年 4 月后的利率期限
结构。 θ 的估计值为:

$$\hat{\theta} = 4.08\%$$

与基本模型一样, φ 仍是短期利率的一阶自相关系数。只需要用 1 年期利率
的样本观测值的一阶自相关系数去估计它, 估计值为:

$$\hat{\varphi} = 0.648$$

与基本模型不一样的是, 短期利率变化的标准差为 $\frac{\theta\sigma^2}{1-\varphi^2}$, 让它等于 1 年期利
率的样本方差 0.000 532, 可以计算出 σ 的估计值为:

$$\hat{\sigma} = 0.0869$$

最后还有一个参数 λ 需要估计, 它决定了利率期限结构的形状, 因为它决定了
不同期限利率的差别。由(5.31)式得:

$$E(y_t^{(n)}) = \frac{1}{n}(A_0 + B_0\theta) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.33)$$

假定在(5.33)式中, n 的取值为 5, 而 $E(y_t^{(5)})$ 的样本估计值为:

$$E(\hat{y}_t^{(5)}) = 5.84\%$$

解(5.33)式, 可以求出 λ 的估计值为:

$$\hat{\lambda} = -6.07$$

单因子模型是讨论利率时首先要介绍的, 但讨论利率却不能到此为止, 单因子
利率模型与现实中的利率变化有很多不符之处。通过上述估计方法得到的利率模
型与实际中利率期限结构的平均值都无法完全一致, 更不用说利率模型能精确地
描述利率期限结构的变化了。一些不一致是模型固有的, 无法通过更好的参数估

计方法加以改进。在基本模型和 CIR 模型中,各种期限的利率或长短期利率的差别都是短期利率的线性函数,这就意味着它们具有相同的自相关系数,但在实际中,利率的表现世界各国都不是这样。以上交所债券市场利率期限结构为例,其基本统计特征如表 5.4 所示。明显可以看出,不同到期日的收益率具有不同的自相关系数,自相关系数随着到期日的增加而降低,这一点与美国市场的利率期限结构表现完全相反(D. Backus, S. Foresi and C. Telmer, 1991)。另外,不同到期日的利率标准差也不相同,1994 年 1 月至 1996 年 4 月标准差随到期日增加而增加,1996 年 4 月至 2001 年 10 月标准差随到期日增加而减少。这些特征都无法利用基本模型和 CIR 模型来描述。

最后还要提到一点的是,经济状态 z_t 的变化用正态分布描述变量 ϵ_t 也不完全合理。短期利率的月度变化具有非常明显的峰度。

表 5.4 上交所债券市场利率期限结构基本统计特征

到期日(年)	平均值	标准差	偏度	峰度	-阶自相关系数
1994 年 1 月:2001 年 10 月					
1	0.080	0.079	1.647	1.716	0.977
2	0.071	0.053	1.647	2.203	0.985
3	0.066	0.037	1.027	0.529	0.971
4	0.065	0.031	0.700	0.122	0.874
5	0.064	0.030	1.930	8.928	0.721
1994 年 1 月:1996 年 3 月					
1	0.176	0.085	0.158	-1.604	0.939
2	0.133	0.062	0.489	-1.335	0.984
3	0.105	0.037	0.484	-1.191	0.975
4	0.088	0.022	0.405	-0.874	0.940
5	0.078	0.014	0.388	-0.204	0.803
1996 年 4 月:2001 年 10 月					
1	0.041	0.023	0.267	-1.241	0.947
2	0.046	0.022	0.559	-1.042	0.938
3	0.051	0.024	0.728	-0.896	0.941
4	0.056	0.028	1.367	2.427	0.822
5	0.058	0.033	2.503	10.538	0.695
利率期限结构的月度变化 (1994 年 1 月:2001 年 10 月)					
1	-0.003	0.017	-1.768	6.553	-0.312
2	-0.002	0.010	0.031	2.491	-0.147
3	-0.001	0.009	0.917	4.185	-0.259
4	-0.001	0.015	1.287	21.273	-0.443
5	-0.001	0.023	1.236	36.929	-0.455

注:这里报告的自相关系数是使用月度数据计算的相邻两个月的利率的自相关系数。

5.5 无套利定价模型

上一节讨论的基本模型和 CIR 模型不能很好地反映利率期限结构及其变化,不能满足企业界的需要,1986 年霍和李在金融企业界掀起了异常重要的变革,他们对利率模型的处理方法被布莱克等(Black, Derman and Toy, 1990; Heath, Jarrow and Morton, 1992; Hull and White, 1993)进一步发扬,形成了很多被称为无套利定价模型的利率模型。本节介绍几个比较重要的无套利定价模型。

5.5-1 Ho-Lee 模型

Ho-Lee 模型是 1986 年在二叉树模型下给出的利率模型,我们在第 4 章已经对它详细讨论,在本章我们试图在离散时间、连续状态的框架下叙述 Ho-Lee 模型, Ho-Lee 模型可以看作 Vasicek 模型的一种推广。

作为基本模型的推广,假定状态变量具有形式:

$$z_{t+1} = z_t + \alpha_{t+1} + \eta_{t+1} \quad (5.34)$$

其中 α_t 是只与时间 t 有关的参数, $\eta_{t+1} \sim N(0, \beta^2)$, 折现因子具有形式:

$$- \ln m_{t+1} = z_t + \gamma \eta_{t+1} \quad (5.35)$$

它与基本模型的不同体现在两个方面:短期利率不再是均值回复过程,相当于基本模型中的状态变量 φ 的值取 1;状态变量包含与时间 t 有关的参数。让 α_t 随时间一起变化是 Ho-Lee 模型的重要推广,后面我们可以看到, Ho-Lee 模型中可以选取 $(\alpha_t, \alpha_{t+1}, \dots)$, 使 Ho-Lee 模型与当前的利率期限结构完全一致。这也是无套利模型称呼的由来。

在 Ho-Lee 模型下,由 1 期不付息债券的价格与状态变量的关系可以推出短期利率的形式为:

$$r_t = z_t - (\gamma \beta)^2 / 2 \quad (5.36)$$

远期利率为:

$$f_t^{(n+n+1)} = r_t + \sum_{i=1}^n \alpha_{t+i} + [\gamma^2 - (\gamma + n)^2] \beta^2 / 2 \quad (5.37)$$

远期利率的推导,将在介绍 Black-Derman-Toy 模型时一一给出,因为其推导过程只是 Black-Derman-Toy 模型下的一个特殊情况。从远期利率和短期利率的关系式(5.37)式可以看出,短期利率的 1 单位变化导致远期利率的 1 单位变化,而在基本模型中,短期利率的变化对远期利率影响随着 n 的变大逐渐变小(在 $\varphi < 1$ 时)。(5.37)式右边最后一项是远期利率的风险金。

我们再看 Ho-Lee 模型的一些特征。先看短期利率的变化,由(5.36)式和(5.34)式,将来时间 $t+n$ 时的短期利率与当前时间 t 的短期利率的关系为:

$$r_{t+n} = r_t + \sum_{j=1}^n (\alpha_{t+j} + \eta_{t+j})$$

短期利率的条件期望和条件方差分别为:

$$\begin{aligned} E_t(r_{t+n}) &= r_t + \sum_{j=1}^n \alpha_{t+j} \\ \text{var}_t(r_{t+n}) &= n\beta^2 \end{aligned}$$

在实际应用中,常常选择 $\{\alpha_{t+j}, j = 1, 2, \dots\}$ 的取值使模型与当前的利率期限结构完全一致,假定利率期限结构用远期利率表示为 $f_t^{(0 \rightarrow 1)}, f_t^{(1 \rightarrow 2)}, \dots, f_t^{(n \rightarrow n+1)}$, $\{\alpha_{t+j}, j = 1, 2, \dots\}$ 的取值为:

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{t+j} = f_t^{(n \rightarrow n+1)} - f_t^{(0 \rightarrow 1)} - [\gamma^2 - (\gamma + n)^2]\beta^2/2 \quad (5.38)$$

参数 β 可以用短期利率的标准差来估计,因为 $\text{var}_t(r_{t+1}) = \beta^2$,进一步有 $\text{var}_t(r_t) = \beta^2$ 。 γ 的影响主要体现在风险金的取值上,可以使 Ho-Lee 模型适应现实中存在的风险金形式。

5.5-2 Black-Derman-Toy 模型

Black-Derman-Toy 模型在 Ho-Lee 模型的基础上再作进一步推广,首先它让短期利率的对数服从正态分布,避免了短期利率可能取负值的情况,然后它假定利率的期望值和波动率都随时间发生变化。为了简便起见,这里仍假定短期利率的变化服从正态分布。

在 Black-Derman-Toy 模型下,状态变量为:

$$z_{t+1} = z_t + \alpha_{t+1} + \eta_{t+1} \quad (5.39)$$

其中 α_t 是只与时间 t 有关的参数, $\eta_{t+1} \sim N(0, \beta_{t+1}^2)$, β_{t+1}^2 也随时间变化。折现因子具有形式:

$$-\ln m_{t+1} = z_t + \gamma \eta_{t+1} \quad (5.40)$$

有关证明放在本章附录中,可以证明,短期利率和远期利率分别为:

$$\begin{aligned} r_t &= -\ln(E_t m_{t+1}) \\ &= z_t - (\gamma \beta_{t+1})^2 / 2 \end{aligned} \quad (5.41)$$

远期利率为:

$$f_t^{(n \rightarrow n+1)} = r_t + \sum_{j=1}^n \alpha_{t+j} + [\gamma^2 - (\gamma + n)^2] \beta_{t+1}^2 / 2 \quad (5.42)$$

$$+ \sum_{j=1}^n (\gamma + n - j)^2 (\beta_{t+j}^2 - \beta_{t+j+1}^2) / 2$$

当 $\beta = \beta_t$ 时, Black-Derman-Toy 模型就变成了 Ho-Lee 模型, 由于波动率参数随时间发生变化, 远期利率的风险更为复杂。

我们再看短期利率的变化。短期利率的变化服从方程:

$$r_{t+1} = r_t + \gamma^2 (\beta_{t+1}^2 - \beta_{t+2}^2) / 2 + \alpha_{t+1} + \eta_{t+1} \quad (5.43)$$

时间 $t+n$ 时的短期利率和当前时刻 t 的短期利率有关系:

$$r_{t+n} = r_t + \gamma^2 (\beta_{t+1}^2 - \beta_{t+n+1}^2) / 2 + \sum_{j=1}^n (\alpha_{t+j} + \eta_{t+j})$$

r_{t+n} 的条件数学期望和条件方差分别为:

$$E_t(r_{t+n}) = r_t + \gamma^2 (\beta_{t+1}^2 - \beta_{t+n+1}^2) / 2 + \sum_{j=1}^n \alpha_{t+j} \quad (5.44)$$

$$\text{var}_t(r_{t+n}) = \sum_{j=1}^n \beta_{t+j}^2 \quad (5.45)$$

5.5-3 Heath-Jarrow-Morton 模型

Heath-Jarrow-Morton 模型(1992)(以下简称 HJM 模型)不是描述短期利率的变化, 而是描述以远期利率表述的整个利率期限结构的变化, 模型首先假定远期利率的变化为:

$$f_{t+1}^{(n+1-n)} = f_t^{(n+1-n+1)} + \alpha_{nt} + \sigma_{nt} \varepsilon_{t+1} \quad n \geq 1, 2, \dots \quad (5.46)$$

其中 $\{\varepsilon_{t+1}, t = 1, 2, \dots\}$ 是相互独立的, 同属标准正态分布的时间序列, α_{nt} 、 σ_{nt} 是随时间 t 变化的参数。希思、贾罗和莫顿首先提出这样一个问题: 在无套利的资本市场上, α_{nt} 、 σ_{nt} 应该满足什么关系? 我们首先介绍他们讨论 α_{nt} 、 σ_{nt} 关系的思路, 然后再用折现因子模型来讨论这个问题, 两种方法得到相同的结论。

一个 $n+1$ 期后到期的面值为 1 的不付息债券在时间区间 $[t, t+1]$ 的收益率为:

$$\begin{aligned} \ln R_{t+1}^{(n+1)} &= \ln P_{t+1}^{(n)} - \ln P_t^{(n+1)} \\ &= -(f_{t+1}^{(0+1)} + f_{t+1}^{(1+2)} + \dots + f_{t+1}^{(n-1+n)}) + (r_t + f_t^{(1+2)} + \dots + f_t^{(n+n+1)}) \\ &= r_t - \sum_{j=1}^n (f_{t+1}^{(1+j)} - f_t^{(j+1)}) \\ &= r_t - A_{nt} - S_{nt} \varepsilon_{t+1} \end{aligned} \quad (5.47)$$

其中

$$A_{nt} = \sum_{j=1}^n \alpha_j$$

$$S_{nt} = \sum_{j=1}^n \sigma_{jt}$$

$\ln R_{t+1}^{(n+1)}$ 的条件期望值和方差分别为：

$$E_t(\ln R_{t+1}^{(n+1)}) = r_t - A_{nt}$$

$$\text{var}_t(\ln R_{t+1}^{(n+1)}) = S_{nt}^2$$

因此

$$\ln E_t R_{t+1}^{(n+1)} = r_t - A_{nt} + S_{nt}^2 / 2$$

希思等假定任何到期日债券的期望超额回报率都等于超额回报率的标准差乘以单位风险的风险金，或称为风险的市场价格，记为 γ_t ，即

$$-A_{nt} + S_{nt}^2 / 2 = -\gamma_t S_{nt} \quad t = 1, 2, \dots \quad (5.48)$$

这是在无套利的资本市场上，参数之间要满足的关系式。

下面用折现因子法讨论 HJM 模型，假定折现因子具有形式：

$$-\ln m_{t+1} = \delta_t + \lambda_t \epsilon_{t+1}$$

利用

$$E_t(m_{t+1} R_{t+1}^{(n+1)}) = 1$$

把(5.47)式代入，得到：

$$r_t = \delta_t - A_{nt} - (\lambda_t + S_{nt})^2 / 2 \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.49)$$

在 $n = 1$ 时和 $n = \tau$ 时，(5.49) 式都成立，然后相减，得到：

$$-A_{nt} + S_{nt}^2 / 2 = -\lambda_t S_{nt} \quad t = 1, 2, \dots$$

上式与(5.48)式的唯一区别是参数 γ_t 和参数 λ_t 的记号差别。

HJM 模型包含了很多模型作为它的特殊情况，包括前面叙述的所有模型。以 Vasicek 模型为例，其远期利率的表达式为：

$$f_{t+1}^{(n-1+n)} = f_t^{(n+n-1)} + \frac{1}{2} \left[\left(\lambda + \frac{1-\varphi^n}{1-\varphi} \sigma \right)^2 - \left(\lambda + \frac{1-\varphi^{n-1}}{1-\varphi} \right)^2 \sigma^2 / 2 \right] \\ + (\varphi^{n-1} - \varphi^n) \delta + \varphi^{n-1} \epsilon_{t+1}$$

作为 HJM 的特殊情况，其参数取值为：

$$\sigma_{nt} = \varphi^{t-n} \sigma \\ \alpha_{nt} = \frac{1}{2} \left[\left(\lambda + \frac{1-\varphi^n}{1-\varphi} \sigma \right)^2 - \left(\lambda + \frac{1-\varphi^{n-1}}{1-\varphi} \right)^2 \sigma^2 / 2 \right] + (\varphi^{n-1} - \varphi^n) \delta$$

5.6 非正态模型——Das 跳跃模型

在前面介绍的模型中,假定随机波动项或者称为导致利率不确定变化的部分 ϵ_{t+1} ,服从正态分布,在随机过程中,称这些利率过程为扩散过程。但在对上海证交所利率期限结构的实证分析中,利率变化并不是正态分布,而是表现出非常明显的峰度。在连续时间模型中,对正态分布的偏离一般用跳跃过程(jump process)描述,在离散时间下,可以选择非正态分布描述 ϵ_{t+1} 的分布。达斯和福尔西(Das, 1997; Das and Foresi, 1996)采用了这种方法。一种比较简单的非正态分布是正态分布的混合, ϵ_{t+1} 可描述为:

$$\epsilon_{t+1} = \begin{cases} \epsilon_{1,t+1} & \text{概率为 } \pi \\ \epsilon_{2,t+1} & \text{概率为 } 1 - \pi \end{cases} \quad (5.50)$$

其中 $\epsilon_{i,t+1}, i = 1, 2$ 服从正态分布 $N(0, \sigma_i)$, $i = 1, 2$,并且相互独立。 ϵ_{t+1} 的数学期望为0,方差满足:

$$\pi_1 + (1 - \pi)\sigma_2^2 = 1 \quad (5.51)$$

假定状态变量服从一阶自回归过程:

$$z_{t+1} = \varphi z_t + (1 - \varphi)\theta + \sigma \epsilon_{t+1}$$

折现因子为:

$$-\ln m_{t+1} = \delta + z_t + \lambda \epsilon_{t+1}$$

尽管 ϵ_{t+1} 不再服从正态分布,债券价格的对数仍然是状态变量的线性函数,对一个 n 年后到期的不付息债券,价格为:

$$-\ln P_t^{(n)} = A_n + B_n z_t$$

已知 $A_0 = 0, B_0 = 0$,利用方程:

$$P_t^{(n-1)} = E_t(m_t P_{t+1}^{(n)})$$

可以得出 A_n, B_n 的递推关系式:

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= A_n + \delta + B_n(1 - \varphi)\theta + \ln[(1 - \pi)\exp[(\lambda + B_n\sigma)^2 t_1/2] \\ &\quad + \pi\exp[(\lambda - B_n\sigma)^2 t_2/2]] \quad (5.52) \\ B_{n+1} &= 1 + B_n\varphi \end{aligned}$$

在推导过程中用到:

$$E_t \exp(c \epsilon_{t+1}) = (1 - \pi)\exp(c^2 t_1/2) + \pi\exp(c^2 t_2/2)$$

由(5.51)式可以看出,只要选择:

$$\delta = -\ln[(1-\pi)\exp(\lambda^2 \epsilon_1/2) + \pi \exp(\lambda^2 \epsilon_2/2)]$$

就一定有：

$$A_1 = 0, B_1 = 1$$

这时短期利率 r_t 就等于状态变量 z_t 。

Das 模型实际上是 Vasicek 模型在利率非正态变化下的推广。在混合正态模型(5.50)式下,短期利率非预期变化的峰度为:

$$\gamma_2^e = 3 \frac{(1-\pi) + \pi^2}{[(1-\pi) + \pi]^2} \quad (5.53)$$

其中 $\epsilon = \epsilon_2/\epsilon_1$ 。如果说混合正态分布的提出主要是为了描述短期利率变化的峰度的话,则参数 $\epsilon_1, \epsilon_2, \pi$ 的选取主要是为了满足(5.53)式和(5.51)式。一种参数取值方法为:任意选定参数 π 的取值,再由(5.53)式和(5.51)式决定 ϵ_2, ϵ 的取值。除 $\epsilon_1, \epsilon_2, \pi$ 外,还有三个参数 φ, θ, σ ,与 Vasicek 模型一样,它们分别由短期利率的一阶自相关系数、平均值和标准差决定。 λ 由某个长期利率,如 5 年期利率的样本平均值决定。

5.7 多因子模型

在前面讨论的所有利率模型中,只有一个状态变量决定了经济状态的变化,这些相应的利率模型也被称为单因子利率模型。但在实际问题中,经济状态是由多个因素决定的,它们的非预期变化形成了长期利率的风险。对我国上交所债券市场的利率期限结构的分析表明,至少要有三个状态变量才能够反映长期利率的风险结构。因此实际问题需要多个因子的利率模型。实际上,在单因子模型中,不管是 Vasicek 模型还是 CIR 模型,参数的选取无法和平均的利率期限结构完全一致,另一方面,参数的选取也无法与各种到期日的利率一阶自相关系数一致。多因子模型在这两方面都可以改进单因子模型的不足。

Vasicek 模型仍是基本的多因子利率模型,本节首先介绍两因子的 Vasicek 模型,然后介绍一类广泛应用的利率模型:Affine(Duffie and Kan, 1996)模型。常见的多因子 CIR 模型和 Longstaff-Schwartz 模型(1992)都是它的特殊情况。

5.7-1 多因子 Vasicek 模型

在多因子的 Vasicek 模型中,有多个相互独立的经济状态变量或称为因子 z_i ,其动态变化服从:

$$z_{t+1} = \varphi z_t + \sigma \varepsilon_t \quad i = 1, 2, \dots \quad (5.54)$$

其中 ε_t 服从标准正态分布,关于不同的 i 和 t 都是相互独立的。折现因子为:

$$-\ln m_{t+1} = \delta + \sum_i (\lambda_i^2/2 + z_i + \lambda_i \varepsilon_{i+1}) \quad (5.55)$$

可以用与前面同样的方法导出短期利率为：

$$r_t = \delta + \sum_i z_i \quad (5.56)$$

从(5.56)式可以看出， δ 是短期利率的期望值，可以用短期利率的平均值估计它。对于时间 n 到期的面值为 1 的不付息债券，在时间 t 价格的对数为：

$$-\ln P_t^{(n)} = A_n + \sum_i B_i z_i$$

其中 A_n ， B_n 只与时间 n 有关，与状态变量 z_i 无关，利用定价关系式：

$$P_t^{(n+1)} = E_t(m_t P_{t+1}^{(n)})$$

可以得到 A_n ， B_n 的递推关系式

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= A_n + \delta + \frac{1}{2} \sum_i [\lambda_i^2 - (\lambda_i + B_i \sigma_i)^2] \\ B_{n+1} &= 1 + B_n \varphi_i \end{aligned}$$

利用 $A_0 = B_{t_0} = 0$ 及递推法，可以得到远期利率的表达式：

$$f_t^{(n+n+1)} = \delta + \frac{1}{2} \sum_i \left[\lambda_i^2 - \left(\lambda_i + \frac{1-\varphi_i}{1-\varphi_i} \sigma_i \right)^2 \right] + \sum_i \varphi_i z_i \quad (5.57)$$

从(5.57)式可以看出，状态变量的一阶自相关系数 φ_i 决定了状态变量对远期利率的影响程度。 φ_i 接近于 1 时，在它的影响下，远期利率之间差别很小，而且远期利率的自相关系数与短期利率的一阶自相关系数差别很小； φ_i 比较小，接近于 0 时，远期利率之间差别较大，而且远期利率的自相关系数与短期利率的一阶自相关系数差别也较大。下面详细讨论在两状态变量下，参数的估计方法。

- (1) 由短期利率的平均值估计参数 δ 。
- (2) $\sigma_1, \varphi_1; \sigma_2, \varphi_2$ 分别反映了 5 年期利率的方差和协方差，以及 5 年期利率与 1 年期利率差的方差和协方差。现在的问题是不能直接估计出它们，因为这些参数对长期利率或长短期利率差都有影响作用。由前面的推导，利率或利率差都可以看成是状态变量的线性函数，即

$$s_t = c_0 + c_1 z_{1t} + c_2 z_{2t}$$

其中 s_t 代表长期利率或长短期利率差， $\{c_i\}$ 是 $\{A_n, B_n\}$ 的函数。 s_t 的方差为：

$$\text{var}(s) = c_1^2 \text{var}(z_1) + c_2^2 \text{var}(z_2) \quad (5.58)$$

一阶自相关系数为：

$$\rho_1 = \frac{c_1^2 \text{var}(z_1)}{c_1^2 \text{var}(z_1) + c_2^2 \text{var}(z_2)} \varphi_1 + \frac{c_2^2 \text{var}(z_2)}{c_1^2 \text{var}(z_1) + c_2^2 \text{var}(z_2)} \varphi_2 \quad (5.59)$$

估计参数的难度在于 c_i 与这些要估计的参数有关。首先初步估计出 $\{\varphi_i\}$, 然后根据 $\{\varphi_i\}$ 计算出 $\{c_i\}$ (因为 $c_i, i = 1, 2$ 只与 $\{\varphi_i\}$ 有关), 再根据(5.58)式计算出状态变量的方差; 有了状态变量的方差, 反过来根据(5.59)式可以计算出 $\{\varphi_i\}$, 这样重复计算下去, 直至误差很小。

(3) 最后是估计参数 $\lambda_i, i = 1, 2$, 根据两个长期利率的平均值, 假定 3 年期和 5 年期, 就可以估计出参数 $\lambda_i, i = 1, 2$ 。

5.7-2 Affine 模型

多因子 Vasicek 模型只不过是--类被称为 Affine 利率模型的一个特殊情况。Affine 模型指这样一类利率模型: 在此利率模型下, 债券价格的对数是状态变量的线性函数。Affine 模型是 1996 年由达菲(Duffie)和坎(Kan)给出的。我们仅对模型进行一个大致描述, 不进行详细讨论, 对离散时间的讨论, 可参考巴克斯等人的文献(D. Backus, S. Foresi and C. Telmer, 1996)。

假定有 k 个状态变量, 其变化服从:

$$z_{t+1} = (I - \Phi)\theta + \Phi z_t + V(z_t)^{1/2} \epsilon_{t+1} \quad (5.60)$$

其中: I 是 $k \times k$ 单位矩阵; Φ 是 $k \times k$ 单位矩阵, 主对角线上的元素是正值; $V(z_t)$ 是 $k \times k$ 单位矩阵, 只有主对角线上的元素不为 0, 每个元素取值为: $v_i(z) = a_i + \beta_i^T z$, 且它一定是正值; $\{\epsilon_t\} \sim N(0, I_{k \times k})$ 。

折现因子的形式为:

$$-\ln m_{t+1} = \delta + \gamma^T z_t + \lambda^T V(z_t)^{1/2} \epsilon_{t+1} \quad (5.61)$$

在这些假定下, 债券价格的对数仍是短期利率的线性函数, 即

$$-\ln P_t^{(n)} = A_n + B_n^T z_t$$

A_n, B_n 仍可以利用递推关系得到:

$$A(n+1) = A(n) + \delta + B(n)^T (I - \Phi)\theta - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k (\lambda_j + B(n)_j)^2 a_j \quad (5.62)$$

$$B(n+1)^T = \gamma^T + B(n)^T \Phi - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k (\lambda_j + B(n)_j)^2 \beta_j^T \quad (5.63)$$

$n = 0$ 时, $A(0) = 0, B(0) = 0$ 。长期利率的期望值与状态变量的期望值的关系为:

$$E(y_t^{(n)}) = \frac{1}{n} (A_n + B_n^T \theta)$$

其中 θ 是状态变量的期望值。而状态变量的方差阵 Γ_0 可以通过下式计算得到:

$$\text{vec}(\Gamma_0) = (I - \Phi \otimes \Phi)^{-1} \text{vec}[V(\theta)]$$

5.8 利率衍生产品的定价

有了利率模型,可以对任何价值只依赖于利率的金融产品进行定价,因为折现因子模型对任何形式的现金流都是成立的。假定某个复杂债券的或有现金流为 $\{h_{t+j} : j = 1, 2, \dots, n\}$,其在时间 t 的价值为:

$$E_t \sum_{j=1}^n M_{t+j} h_{t+j}$$

其中:

$$M_{t+j} = m_{t+1} m_{t+2} \cdots m_{t+j}$$

我们以欧式期权为例,假设标的资产是一个 n 期后到期的面值为1的债券,期权的到期日为 $t+\tau$,执行价格为 k ,其或有现金流只有一个:

$$h_{t+\tau} = \max(P_{t+\tau}^{(n)} - k, 0)$$

因此欧式期权的现价为:

$$c_t^{(n)} = E_t[M_{t+\tau} \max(P_{t+\tau}^{(n)} - k, 0)] \quad (5.64)$$

我们以基本模型 Vasicek 模型为例,给出欧式期权的计算公式。在 Vasicek 模型下,折现因子和债券价格都服从对数正态分布。以 $x = (x_1, x_2)$ 代表两个服从对数正态分布的随机变量,其期望值和方差阵分别为 $\mu = (\mu_1, \mu_2)^T$, $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$,首先给出对求期权价格有用的一个等式:

$$E[x_1 I(x_2 - k)] = \exp(\mu_1 + \sigma_1^2/2) N(d)$$

其中:

$$d = \frac{\mu_2 - \ln k + \sigma_{12}}{\sigma_2};$$

$N(\cdot)$ 是标准正态分布的分布函数;

$I(\cdot)$ 是示性函数,当 $x_2 > k$ 时它的取值为1,其他情况下取值为0。

另外一个有用的等式为:

$$E[(x_1 x_2) I(x_2 - k)] = \exp(\mu_1 + \mu_2 + \sigma_1^2/2 + \sigma_2^2/2 + \sigma_{12}) N(d)$$

其中:

$d = \frac{\mu_2 - \ln k + \sigma_{12} + \sigma_2^2}{\sigma_2}$,其他记号与上一个等式相同。这两个等式可以用标准的概率方法计算出来,在此不作推导。

在计算期权价格时,我们以 $M_{t,t+\tau}$ 作为 x_1 ,以 $P_{t+\tau}^{(n)}$ 作为 x_2 。为简化表达式,记:

$$C_n = \sum_{j=1}^n \left(\lambda + \frac{1-\varphi^{r-j}}{1-\varphi} \right)^2 \sigma^2 / 2$$

我们再来看基本模型中 $M_{t,t+\tau}$ 和 $P_{t+\tau}^{(n)}$ 的表达式:

$$-\ln M_{t,t+\tau} = \bar{\delta} + \frac{1-\varphi^r}{1-\varphi} (r_t - \mu) + \sum_{j=1}^{\tau} \left(\lambda + \frac{1-\varphi^{r-j}}{1-\varphi} \right) \varepsilon_{t+j}$$

$-\ln M_{t,t+\tau}$ 的条件数学期望和条件方差为:

$$\begin{aligned} E_t(-\ln M_{t,t+\tau}) &= \bar{\delta} + \frac{1-\varphi^r}{1-\varphi} (r_t - \mu) \\ \text{var}_t(-\ln M_{t,t+\tau}) &= \sum_{j=1}^{\tau} \left(\lambda + \frac{1-\varphi^{r-j}}{1-\varphi} \right)^2 \sigma^2 \\ &= 2C_n \\ -\ln P_{t+\tau}^{(n)} &= \bar{\delta} - C_n + \frac{1-\varphi^n}{1-\varphi} (r_{t+\tau} - \mu) \\ &= \bar{\delta} - C_n + \frac{1-\varphi^n}{1-\varphi} \varphi^r (r_t - \mu) + \left(\frac{1-\varphi^n}{1-\varphi} \right) \sum_{j=1}^{\tau} \varphi^{r-j} \varepsilon_{t+j} \\ &= -\ln P_t^{(r+n)} + \ln P_t^{(r)} + (C_{n+\tau} - C_\tau - C_n) + \left(\frac{1-\varphi^n}{1-\varphi} \right) \sum_{j=1}^{\tau} \varphi^{r-j} \varepsilon_{t+j} \end{aligned}$$

其条件数学期望和条件方差为:

$$E_t(-\ln P_{t+\tau}^{(n)}) = -\ln P_t^{(r+n)} + \ln P_t^{(r)} + (C_{n+\tau} - C_\tau - C_n)$$

$$\text{var}_t(-\ln P_{t+\tau}^{(n)}) = \left(\frac{1-\varphi^n}{1-\varphi} \right)^2 \sum_{j=1}^{\tau} \varphi^{2(r-j)} \sigma^2$$

经过简单的数学运算,可以得出:

$$c_t^{r,n} = P_t^{(r+n)} N(d_1) - k P_t^{(r)} N(d_2) \quad (5.65)$$

其中:

$$d_1 = \frac{\ln[P_t^{(r+n)} / (P_t^{(r)} k)] + \nu_{r,n}^2 / 2}{\nu_{r,n}}$$

$$d_2 = d_1 - \nu_{r,n}$$

$$\nu_{r,n}^2 = \sigma^2 \left(\frac{1-\varphi^n}{1-\varphi} \right)^2 \sum_{j=1}^{\tau} \varphi^{2(r-j)}$$

本章小结

本章研究了常见的利率模型,包括 Vasicek 模型,CIR 模型,Ho-Lee 模型,Black-Derman-Toy 模型及多因子利率模型等。采用离散时间,连续状态的表述方

式，并结合上海交易所债券市场进行实证分析。主要概念和公式有：

(1) 利率期限结构的预期假设是认识利率的基础理论，但实证表明，预期假设不能解释债券市场的债券价格，预期假设有三种等价的表述形式：

① N 期利率等于短期即期利率的平均值的期望，但考虑到风险的不同，还要加上一个风险金，即

$$y_t^{(N)} = \frac{1}{N} E_t(y_t^{(1)} + y_{t+1}^{(1)} + y_{t+2}^{(1)} + y_{t+3}^{(1)} + \dots + y_{t+N-1}^{(1)}) + \text{风险金}$$

② 远期利率等于未来即期利率的期望值，另外，由于两者的风险不同，两者还可能相差一个风险金，即

$$f_t^{(N+n+1)} = E_t(y_{t+N}^{(1)}) + \text{风险金}$$

③ 不同到期日债券的回报率的期望值等于当前的短期利率。但考虑长期债券具有较高的风险，两者相差一个风险金。即

$$E_t(hpr_{t+1}^{(N)}) = y_t^{(1)} + \text{风险金}$$

(2) 基本的利率模型：Vasicek 模型。

短期利率的变化服从：

$$r_{t+1} = r_t + (1 - \varphi)(\mu - r_t) + \varepsilon_{t+1}$$

将来时间 $t+n$ 时刻与时间 t 时刻的短期利率具有关系：

$$r_{t+n} = r_t + (1 - \varphi^n)(\mu - r_t) + \sum_{j=1}^n \varphi^{n-j} \varepsilon_{t+j}, \quad n = 1, 2, \dots$$

其条件期望和条件方差分别为：

$$\begin{aligned} E_t(r_{t+n}) &= r_t + (1 - \varphi^n)(\mu - r_t) \\ \text{var}_t(r_{t+n}) &= \sigma^2 \sum_{j=1}^n \varphi^{2(n-j)} = \sigma^2 \frac{1 - \varphi^{2n}}{1 - \varphi^2} \end{aligned}$$

n 期年利率为：

$$y_t^{(n)} = \delta + \frac{1}{n} \left(\frac{1 - \varphi^n}{1 - \varphi} \right) (z_t - \delta) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\lambda + \frac{1 - \varphi^{n-j}}{1 - \varphi} \right)^2 \sigma^2 / 2$$

而远期利率为：

$$\begin{aligned} f_t^{(n+n+1)} &= \ln P_t^{(n)} - \ln P_t^{(n+1)} \\ &= \delta + \varphi^n (\delta - z_t) - \left(\lambda + \frac{1 - \varphi^n}{1 - \varphi} \right)^2 \sigma^2 / 2 \end{aligned}$$

实证表明，基本模型无法与利率期限结构中各期利率的时间序列平均值一致。

(3) CIR 模型。

短期利率的变化也服从方程：

$$r_{t+1} = (1 - \varphi)\theta + \varphi r_t + \sigma z_t^{1/2} \varepsilon_{t+1}$$

n 期年利率为：

$$y_t^{(n)} = \frac{1}{n} A_n + \frac{1}{n} B_n z_t \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

其中 A_n, B_n 只与债权的到期日 n 有关。可以通过递推关系求出 A_n, B_n ：

$$\begin{aligned} A_0 &= B_0 = 0 \\ A_{n+1} &= A_n + B_n(1 - \varphi) \\ B_{n+1} &= 1 + \lambda^2/2 + B_n \varphi - (\lambda + B_n \sigma)^2/2 \end{aligned}$$

(4) Ho-Lee 模型。

Ho-Lee 模型是霍和李 1986 年在二叉树模型下给出的利率模型，我们在第 4 章已经对它详细讨论，在本章给出的是在离散时间、连续状态框架下的 Ho-Lee 模型。Ho-Lee 模型中可以选取 $\{\alpha_t, \alpha_{t+1}, \dots\}$ ，使 Ho-Lee 模型与当前的利率期限结构完全一致。这也是无套利模型称呼的由来。

在 Ho-Lee 模型下，远期利率为：

$$f_t^{(n \rightarrow n+1)} = r_t + \sum_{j=1}^n \alpha_{t+j} + [\gamma^2 - (\gamma + n)^2] \beta^2 / 2$$

时间 $t+n$ 时的短期利率与时间 t 的短期利率的关系为：

$$r_{t+n} = r_t + \sum_{j=1}^n (\alpha_{t+j} + \eta_{t+j})$$

短期利率的条件期望和条件方差分别为：

$$\begin{aligned} E_t(r_{t+n}) &= r_t + \sum_{j=1}^n \alpha_{t+j} \\ \text{var}_t(r_{t+n}) &= \eta \beta^2 \end{aligned}$$

在实际应用中，常常选择 $\{\alpha_{t+j}, j = 1, 2, \dots\}$ 的取值使模型与当前的利率期限结构完全一致，假定当前的利率期限结构用远期利率表示为， $f_t^{(0 \rightarrow 1)}, f_t^{(1 \rightarrow 2)}, \dots, f_t^{(n \rightarrow n+1)}, \{\alpha_{t+j}, j = 1, 2, \dots\}$ 的取值为：

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{t+j} = f_t^{(n \rightarrow n+1)} - f_t^{(0 \rightarrow 1)} - [\gamma^2 - (\gamma + n)^2] \beta^2 / 2$$

(5) Black-Derman-Toy 模型。

Black-Derman-Toy 模型是在 Ho-Lee 模型的基础上再作的进一步推广，首先它让短期利率的对数服从正态分布，避免了短期利率可能取负值的情况，然后它假定利率的期望值和波动率都随时间发生变化。为了简便起见，本章仍假定短期利率的变化服从正态分布。

远期利率为：

$$\begin{aligned} f_t^{(n+1)} &= r_t + \sum_{j=1}^n \alpha_{t+j} + [\gamma^2 - (\gamma + n)^2] \beta_{t+1}^2 / 2 \\ &\quad + \sum_{j=1}^n (\gamma + n - j)^2 (\beta_{t+j}^2 - \beta_{t+j+1}^2) / 2 \end{aligned}$$

短期利率的变化服从方程：

$$r_{t+1} = r_t + \gamma^2 (\beta_{t+1}^2 - \beta_{t+2}^2) / 2 + \alpha_{t+1} + \eta_{t+1}$$

(6) Heath-Jarrow-Morton 模型。

Heath-Jarrow-Morton 模型描述以远期利率表述的整个利率期限结构的变化，模型假定远期利率的变化为：

$$f_{t+1}^{(n+1)} = f_t^{(n+1)} + \alpha_n + \sigma_n \varepsilon_{t+1} \quad n \geq 1, 2, \dots$$

其中 $\{\varepsilon_{t+1}, t = 1, 2, \dots\}$ 是相互独立，同属标准正态分布的时间序列， α_n , σ_n 是随时间 t 变化的参数，满足方程：

$$A_n + S_n^2 / 2 = \lambda_n S_n \quad n = 1, 2, \dots$$

其中：

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \\ S_n &= \sum_{j=1}^n \sigma_j \end{aligned}$$

(7) 多因子 Vasicek 模型。

在多因子的 Vasicek 模型中，有多个相互独立的经济状态变量或称为因子 z_i ，其动态变化服从：

$$z_{t+1} = \varphi_i z_t + \sigma_i \varepsilon_i \quad i = 1, 2, \dots$$

其中 ε_i 服从标准正态分布，对于不同的 i 和 t 都是相互独立的。折现因子为：

$$-\ln m_{t+1} = \delta + \sum_i (\lambda_i^2 / 2 + z_i + \lambda_i \varepsilon_{t+1})$$

短期利率为：

$$r_t = \delta + \sum_i z_i$$

n 期年利率为：

$$y_t^{(n)} = \frac{1}{n} A_n + \frac{1}{n} \sum_i B_n z_i$$

其中 A_n , B_n 只与时间 n 有关，与状态变量 z_i 无关， A_n , B_n 的递推关系式为：

$$A_0 = B_0 = 0$$

$$A_{n+1} = A_n + \delta + \frac{1}{2} \sum_i [\lambda_i^2 - (\lambda_i + B_n \sigma_i)^2]$$

$$B_{n+1} = 1 + B_n \varphi_i$$

远期利率的表达式为：

$$f_t^{(n+n+1)} = \delta + \frac{1}{2} \sum_i \left[\lambda_i^2 - \left(\lambda_i + \frac{1-\varphi_i^n}{1-\varphi_i} \sigma \right)^2 \right] + \sum_i \varphi_i^n z_i$$

(8) 以债券为标的欧式期权的定价。

标的资产：一个 n 期后到期的面值为 1 的债券

欧式期权的到期日为 $t+\tau$ ，执行价格为 k ，到期或有现金流为：

$$h_{t+\tau} = \max(P_{t+\tau}^{(n)} - k, 0)$$

欧式期权的现价为：

$$c_t^{(n)} = E_t[M_{t,t+\tau} \max(P_{t+\tau}^{(n)} - k, 0)]$$

在基本模型——Vasicek 模型下，折现因子和债券价格都服从对数正态分布。期权的价格为

$$c_t^{(n)} = P_t^{(t+n)} N(d_1) - k P_t^{(t)} N(d_2)$$

其中：

$$d_1 = \frac{\ln[P_t^{(t+n)} / (P_t^{(t)} k)] + \nu_{t,n}^2 / 2}{\nu_{t,n}}$$

$$d_2 = d_1 - \nu_{t,n}$$

$$\nu_{t,n}^2 = \sigma^2 \left(\frac{1-\varphi^n}{1-\varphi} \right)^2 \sum_{j=1}^{\tau} \varphi^{2(t-j)}$$

复习与思考

112

金融工程学

1. 考虑 Vasicek 模型的一种推广形式，折现因子为：

$$- \ln m_{t+1} = \delta + \lambda^2 / 2 + z_t + \lambda \epsilon_{t+1} + \tau \eta_{t+1}$$

其中 $\{\eta_{t+1}\} \sim N(0, 1)$ 与 $\{\epsilon_{t+1}\}$ 相互独立，而状态变量不变。

(1) 如果 $\tau = 0$ ，请问 δ 如何影响债券的价格和收益率？应该怎样来估计它？

(2) 如果 $\delta = 0$ ，请问 τ 如何影响债券的价格和收益率？应该怎样来估计它？

2. 假定状态变量为：

$$z_{t+1} = \begin{cases} z_t & \text{概率为 } \varphi \\ \eta_{t+1} & \text{概率为 } 1-\varphi \end{cases}$$

其中 η 是 $[0, a]$ 上的均匀分布。折现因子为：

$$- \ln m_{t+1} = (1 + \lambda^2 / 2) z_t + \lambda z_t^{1/2} \epsilon_{t+1}$$

其中 $\{\epsilon_t\} \sim N(0, 1)$ 与 $\{\eta_t\}$ 相互独立。

(1) 利用这个模型推导债券的价格；

- (2) 考察模型给出的利率期限结构的性质。
3. 在预期理论的假定中, 我们检验了远期利率对即期利率的预测能力, 回归方程为:

$$r_{t+1} - r_t = a + b(f_t^{(1,2)} - r_t) + \text{误差项}$$

- (1) 计算在 Vasicek 模型中, 参数 b 的取值, 再利用 Vasicek 模型中各个参数的估计值估计 b 的取值, 并比较与回归方程中的估计值的差异。
- (2) 计算在 CIR 模型中, b 的取值, 再利用 CIR 个参数的估计值估计 b 的取值, 并比较与回归方程中的估计值的差异。

参考文献

- Black F., Derman E. and Toy W. A., 1990, "One-Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options," *Financial Analyst Journal*, (1):33- 9.
- Bruce Tuckman, 1996, *Fixed Income Securities*, John Wiley & Sons, Inc. .
- D. Backus, S. Foresi and C. Telmer, 1991, "Discrete-Time Models of Bond Pricing," *National Bureau of Economic Research*, Working Paper 6736.
- D. Backus, S. Foresi and C. Telmer, 1996, "Affine Models of Currency Pricing," *National Bureau of Economic Research*, Working Paper 5623, June.
- Das S. R. , 1997, "A Direct Discrete-Time Approach to Poisson-Gaussian Bond Option Pricing in the Heath-Jarrow-Morton Model," *Working Paper*, Harvard University: 1—44.
- Das S. R. and Foresi S. , 1996, "Exact Solution for Bond and Option Prices with Systematic Jump Risk," *Review of Derivative Research*, 1:1—24.
- Duffie D. and Kan R. , 1996, "A Yield-Factor Model of Interest Rates," *Mathematical Finance*, 6: 379—406.
- E. Fama and R. Bliss, 1987, "The Information in Long-Maturity forward Rates." *The American Economic Review*, September: 680—92.
- Frank Fabozzi, 1995, *Fixed Income Mathematics*, IRWIN Professional Publishing (Third edition).
- Hans R. Stoll and Robert E. Whaley, 1993, *Futures and Options*, South-Western Publishing Co. .
- Heath D, Jarrow R. A. and A. J. Morton, 1992, "Contingent Claim Valuation with a Random Evolution of Interest Rate: A New Methodology for Contingent Claims Valuation," *Econometrica*, 60:77- 105.
- Hull J. C. and White A. D. , 1993, "One-Factor Interest Rate Models and Valuation of Interest-Rate Derivative Securities," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 28:235—54.

- John Cochrane, 2001, *Asset Pricing*, Princeton University Press.
- John Cox, 1999, *Investment Banking*, MIT Transparency.
- Keith Brown and Donald Smith, 1995, *Interest Rate and Currency Swaps*, The Research Foundation of The Institute of Chartered Financial Analysis.
- Longstaff F. A. and Schwartz E. S., 1992, "Interest Rate Volatility and the Term Structure: A Two-Factor General Equilibrium Model," *Journal of Finance*, 47:1259 -1282.
- Oliver Grandville, 2001, *Bond Pricing and Portfolio Analysis*, The MIT Press.
- Suresh M. Sundaresan, 1997, *Fixed Income Markets and Their Derivatives*, South-Western College Publishing.

附录 Black-Derman-Toy 模型的推导

在 Black-Derman-Toy 模型下, 折现因子的乘积 $M_{t, t+n}$ 为:

$$-\ln M_{t, t+n} = nz_t + \sum_{j=1}^n (n-j)\alpha_{t+j} + \sum_{j=1}^n (\gamma + n - j)\eta_{t+j}$$

因此债券价格为:

$$-\ln P_t^{(n)} = nz_t + \sum_{j=1}^n (n-j)\alpha_{t+j} - \sum_{j=1}^n (\gamma + n - j)^2 \beta_{t+j}^2 / 2$$

远期利率为:

$$f_t^{(n \rightarrow n+1)} = z_t + \sum_{j=1}^n \alpha_{t+j} - (\gamma + n)^2 \beta_{t+1}^2 / 2 - \sum_{j=1}^n (\gamma + n - j)^2 (\beta_{t+j}^2 - \beta_{t+j+1}^2) / 2$$

短期利率为:

$$r_t = f_t^{(0 \rightarrow 1)} = z_t - (\gamma \beta_{t+1})^2 / 2$$

债券价格、远期利率和折现因子用短期利率表达为:

$$-\ln M_{t, t+n} = n[r_t + (\gamma \beta_{t+1})^2 / 2] + \sum_{j=1}^n (n-j)\alpha_{t+j} + \sum_{j=1}^n (\gamma + n - j)\eta_{t+j}$$

$$-\ln P_t^{(n)} = n[r_t + (\gamma \beta_{t+1})^2 / 2] + \sum_{j=1}^n (n-j)\alpha_{t+j} - \sum_{j=1}^n (\gamma + n - j)^2 \beta_{t+j}^2 / 2$$

$$f_t^{(n \rightarrow n+1)} = r_t + \sum_{j=1}^n \alpha_{t+j} - [\gamma^2 - (\gamma + n)^2] \beta_{t+1}^2 / 2 - \sum_{j=1}^n (\gamma + n - j)^2 (\beta_{t+j}^2 - \beta_{t+j+1}^2) / 2$$

特别地, 当 β_t 不随时间变化时, 上述表达式即为 Ho-Lee 模型的表达式。这时远期利率为:

$$f_t^{(n \rightarrow n+1)} = r_t + \sum_{j=1}^n \alpha_{t+j} + [\gamma^2 - (\gamma + n)^2] \beta^2 / 2$$

互换

互

换是近年来最为成功的金融创新产品，互换在金融分析师看来已成为常规的利率和汇率风险管理手段。互换的价值主要体现在它的实用价值上，单纯从理论上而言，互换可以看成是债券、期权或远期合约的组合。因此本章的侧重点是互换的应用，而非它们的定价研究。

6.1 互换的定义

第一个互换合约出现在 1981 年，是一个以德国马克表示的现金流与以瑞士法郎表示的现金流相交换的一个合约。它是一个货币互换。第一个标准的利率互换出现在 1982 年。互换的产生要归结为一个词：波动率(volatility)，即利率和汇率的波动性或称为风险。汇率的大幅度波动是 1971 年布雷顿森林汇率体系终结以后，各国允许汇率按市场需求浮动；而利率的大幅度波动是在 1979 年以后，美联储为了抑制通货膨胀，放松了对短期利率的控制。

互换早期产生的一个动因是利用不同金融市场上资金成本的差别，来降低资金成本。也就是说互换的产生是为了套利。但在今天，互换的这个作用已经比较小了。互换的使用者是公司或机构管理者，他们使用互换来使经营收益或资产负债免受利率或汇率不利变化的影响。

互换有时也翻译成掉期。互换可以划分为两大类：利率互换和货币互换。利率互换涉及的是同一种货币表示的现金流的交换，现金流的计算一般是以某一个名义本金乘以某种利率，因此也称为利率互换。最普通的利率互换，一方用固定利率乘以名义本金计算现金流量，另一方用浮动利率乘以名义现金流量。

利率互换简单来讲可以这样定义：

定义 6.1 利率互换是指双方签订的一个合约，规定在一定时间里，双方定期交换以一个名义本金作基础，用不同利率计算出的现金流。

利率互换从签订合约到合约结束要经过如下过程：

(1) 合约签订之日：确定好有关条款，包括名义本金、到期日、利率的确定方式等，但没有任何现金流的交换。

(2) 交割日：一方，假定称为 A 方，向另一方，假定称为 B 方，支付固定利率计

算的现金流,B方向A方支付以浮动利率计算的现金流。A方被称为购买了一个互换合约,或者说持有互换合约的多头方。A方之所以称为多头方,可以这样来理解,A方可以从利率上涨中获利。B方为空头方。实际上,互换合约既不是一个资产,也不能看成一个负债。在合约签订之日,它的价值为0。

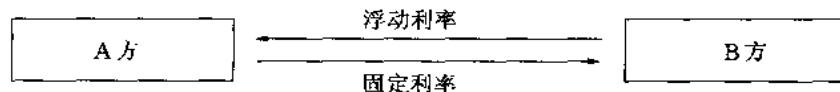


图 6.1 利率互换现金流交换示意图

(3) 到期日:完成最后一次现金流交换后,合约自动结束。

例 6.1 假定一个互换合约如下:

合约生效日:1994年9月30日;

合约到期日:1999年9月30日;

名义本金:30 000;

A方支付固定利率:7.65%(半年复利一次的年利率,计算利息方式为:实际天数/365);

B方支付浮动利率:6个月的LIBOR(货币市场计算利息方式,实际天数/360);

交割日:每年的9月30日和3月30日;

浮动利率确定方式:提前1期确定。

现金流的计算方式:

$$\begin{aligned} \text{第 } t \text{ 次固定现金流支付量} &= \text{互换的固定利率} \times \\ &\quad (\text{第 } t \text{ 期的实际天数}/365) \times \text{名义本金} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{第 } t \text{ 次浮动现金流支付量} &= \text{第 } t-1 \text{ 时 6 个月期 LIBOR} \times \\ &\quad (\text{第 } t \text{ 期的实际天数}/360) \times \text{名义本金} \end{aligned}$$

每期的现金流量计算如表 6.1 所示。

下面我们再来介绍货币互换:

定义 6.2 货币互换是指双方签订一个合约,规定在一定时间里,双方定期交换以一个名义本金作基础,但用不同币种和利率计算出的现金流。

货币互换不同于利率互换:首先,交换的是采用不同货币表示的现金流,其次是货币互换要交换本金。

货币互换从签订合约到合约结束要经过如下过程:

(1) 合约签订日:确定好有关条款,包括本金、到期日、利率的确定方式等,并且交换本金。假定以美元作为本币,合约生效日的现金流交换如图 6.2 所示。

(2) 交割日:一方向另一方支付本币现金流,收取对方的外币现金流,假定本币现金流用 6 个月 LIBOR 计算(本币此处指美元),外币现金流用固定利率计算,交割日的现金流交换如图 6.3 所示。

表 6.1 从固定利率支付方看, 利率互换的现金流

交割日	每期的天数	LIBOR的假定值(%)	互换各期现金流的支付		
			固定利率的支付	浮动利率的流入	净支付(A方)
1994年9月30日	-	5.5	-	-	-
1995年3月30日	181	5.75	1 124.679	829.583	295.96
1995年9月30日	184	6.5	1 143.321	881.667	261.654
1996年3月30日	182	6.75	1 130.893	983.833	145.060
1996年9月30日	184	7.5	1 143.321	1 035.00	108.321
1997年3月30日	181	7.75	1 124.679	1 131.250	(6.571)
1997年9月30日	184	8.25	1 143.321	1 188.333	(45.013)
1998年3月30日	181	7.50	1 124.679	1 244.375	(119.696)
1998年9月30日	184	7.25	1 143.321	1 150.00	(6.679)
1999年3月30日	181	7.75	1 124.679	1 093.542	31.183
1999年9月30日	184	8.00	1 143.321	1 188.333	(45.013)

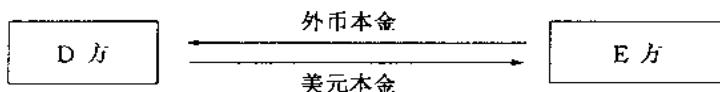


图 6.2 货币互换生效日的本金交换

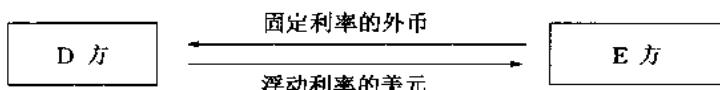


图 6.3 货币互换交割日的现金流交换

(3) 到期日: 互换到期后, 两方各自把本金收回, 现金流如图 6.4 所示。

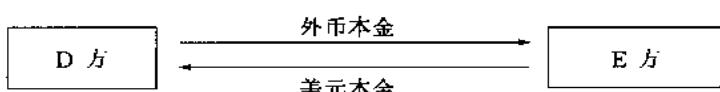


图 6.4 货币互换到期日的现金流交换

例 6.2 假定有一货币互换合约, 其有关条款如下:

生效日: 1998 年 11 月 15 日;

到期日: 2002 年 11 月 15 日;

名义本金: 英镑 2 百万, 美元 3.44 百万;

固定利率: 英镑 8.65% (半年复利一次的年利率, 中长期债券计息方式计算利息, 即计算利息方式为: 实际天数/365);

浮动利率: 美元 6 个月 LIBOR (货币市场计息方式);

交割日: 每年的 11 月 15 日和 5 月 15 日;

LIBOR 的确定方式: 提前 1 期确定。

互换本金的交换以合约签订日的即期汇率决定, 当时的汇率是 1.72 美元/英

镑。英镑每期的现金流为：

$$0.0865 \times (\text{当期的实际天数}/365) \times \text{英镑} 2 \text{ 百万}$$

美元现金流由下式确定：

$$\text{LIBOR} \times (\text{当期的实际天数}/360) \times \text{美元} 3.44 \text{ 百万}$$

每期交换的现金流计算如表 6.2 所示。

表 6.2 从固定利率支付方来看，货币互换合约的现金流

交割日	每期的天数	当期 LIBOR 的假定值(%)	固定利率的流出	浮动利率的流入
初始的本金支付				
11/15/98	-	5.75	3.44(百万美元)	2.00(百万英镑)
利息现金流的交换				
5/15/99	181	6.0	0.0858(百万英镑)	0.0994(百万美元)
11/15/99	184	6.25	0.0872(百万英镑)	0.1055(百万美元)
5/15/00	182	6.70	0.0863(百万英镑)	0.1087(百万美元)
11/15/00	184	7.25	0.0872(百万英镑)	0.1178(百万美元)
5/15/01	181	7.00	0.0858(百万英镑)	0.1254(百万美元)
11/15/01	184	6.75	0.0872(百万英镑)	0.1187(百万美元)
5/15/02	181	5.50	0.0858(百万英镑)	0.1167(百万美元)
最后的利息交 换和本金交換				
11/15/02	184	5.75	0.0872(百万英镑) 和 2(百万英镑)	0.0967(百万美元) 和 3.44(百万美元)

6.2 互换与债券、远期、期权

互换看起来比较简单，它只不过是一系列现金流的交换，但可以从几个不同的角度来解释。互换可以看成是债券的组合，也可以看成是一系列远期合约或者是期权的组合。从互换的不同解释中可以看出互换把固定收益证券市场的货币市场、债券市场、远期和期货市场、期权市场有机地联系在一起。

考虑一个大众型的利率互换：名义本金 10 万元，期限 5 年，固定利率 8%，浮动利率为 LIBOR，每年交换一次现金流。如果不考虑互换的违约风险，对于固定利率接收方来说，互换相当于两个证券的组合：一个是 5 年期浮动利率债券的空头（相当于发行一个债券，浮动利率为 LIBOR）；另一个是 5 年期，息票率为 8% 的固定利率债券的多头（相当于购买一个债券）。显然，如果市场无套利，两个债券的价格应该相等。

我们再看货币互换。假定一个货币互换 5 年后到期，一方按固定利率 8% 接收美元现金流，美元的名义本金是 10 万，同时按固定利率 10% 支付德国马克现金流，

名义本金是 16 万。货币互换在开始和结束都要交换名义本金，名义本金一般按开始时的即期汇率计算。从美元现金流的接收方来说，货币互换可以看成是如下资本市场交易的组合：购买一个息票率为 8% 的 5 年期美元债券，发行一个息票率为 10% 的 5 年期德国马克债券，把发行德国马克债券筹集到的资金按当期汇率换成美元。从图 6.5 可以看出互换和这些资本市场交易具有相同的现金流。

读者不禁要问，既然互换可以看成是资本市场资产的组合，互换还有什么存在的必要呢？从理论上讲是这样，但在实际应用上，互换给我们提供了一个高效的改变资产负债性质从而达到风险管理目的的工具。实际操作中，互换有下列优点：

- (1) 市场上可能很难找到符合需要的、具有理想的到期日和息票率的债券，而互换作为一个合约可以灵活地设计。
- (2) 发行一个债券的发行费用很高而签订一个互换合约的费用低。
- (3) 债券和互换相比，债券的信用风险高，而互换的信用风险低。债券一旦违约，本金利息都很难收回，而互换违约，只不过现金流不再交换罢了。
- (4) 互换是一个表外资产，不会改变企业的资本结构，而发行债券就要增加企业的财务杠杆。

把互换看成债券的组合有利于计算一个互换的市场价值。一般对一个已存在一段时间的互换而言，其市场价值的确定是以一个具有相同到期日和类似信用风险的刚签订的互换作为参考标准来确定的。以大众型利率互换为例：一个 5 年期互换，以固定利率 8% 交换 LIBOR，半年交换一次现金流。假定 1 年过去了，离到期日还有 4 年，而现在刚签订的 4 年期互换以固定利率 7% 交换 LIBOR。对于固定利率接收方来说，互换具有正的价值，价值的大小来自于新的 4 年期互换和它的固定现金流的差额。作为固定现金流的接收方，每次现金流交换，比新的互换现金流多出 $4000 - 3500 = 500$ ，在到期日之前，还有 8 次现金流交换，要折现成现值的话，折现率应该是现在新签订的利率互换的固定利率，即半年复利一次的年利率 7%。5 年期互换 1 年后的价值是：

$$\sum_{i=1}^8 \frac{500}{(1 + 7\%/2)^i} = 3427$$

如果市场上找不到可比的互换，把互换看成债券的组合有助于确定一个互换的价值。对于固定利率接收方来说，它是一个息票率为 8% 的固定利率债券的价值减去一个利率为 LIBOR 的浮动利率债券的价值。但这两种方法计算出的结果很难一致，原因在于互换和债券在信用风险方面的差别。

把互换看成债券的组合也有助于计算互换的利率风险。互换的利率风险同样可以用久期表示。对于刚签订的互换合约，互换的价值为零，利率风险无法用久期表示，但可以用价值久期表示其利率风险。以刚才提到的大众型利率互换为例，对于固定利率接收方来说，互换的价值久期相当于息票率为 8%，具有相同到期日的固定利率债券的价值久期，减去以 LIBOR 为浮动利率的具有相同到期日的浮动利率债券的价值久期。

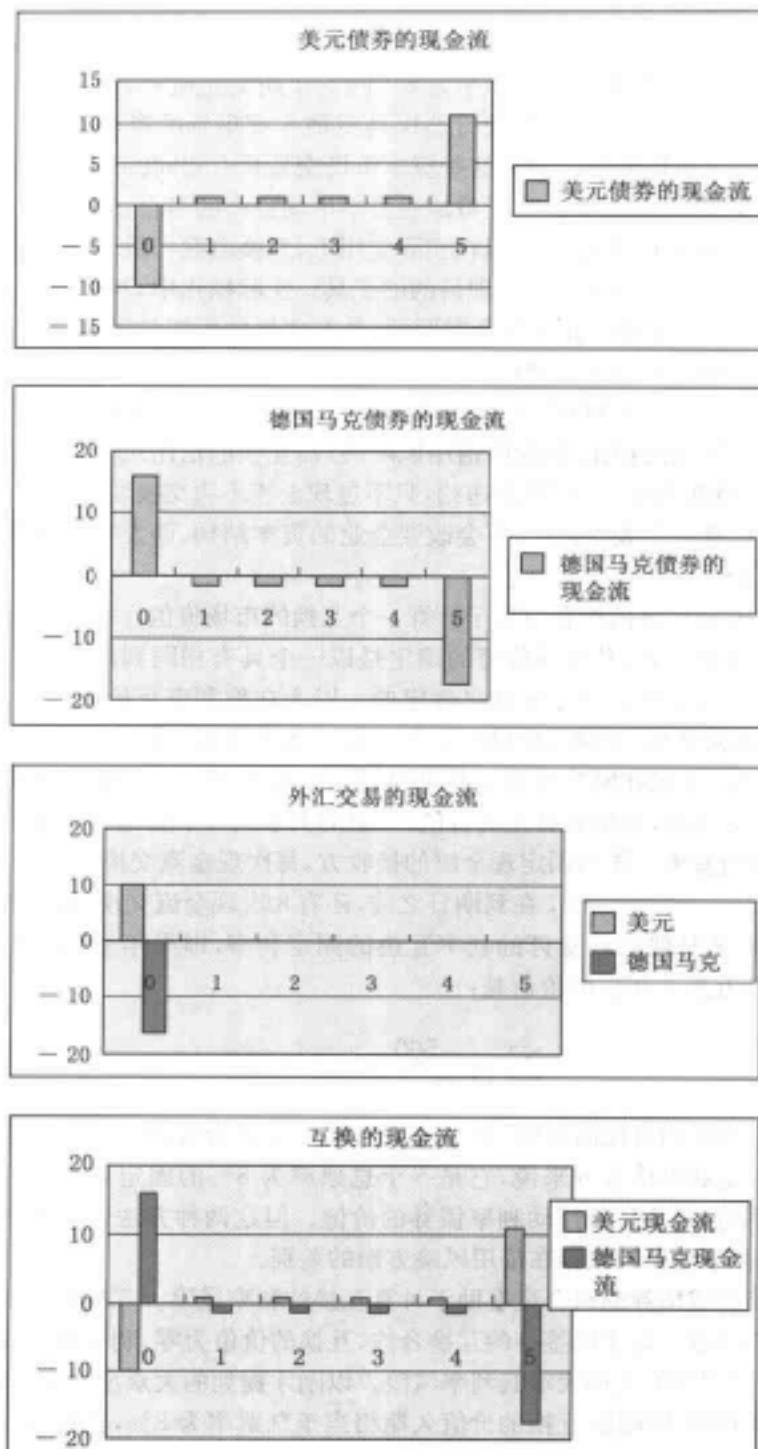


图 6.5 互换相当于两个债券和一个外汇市场交易的组合

货币互换的价值和久期评估要复杂一些。一个货币互换的价值取决于三个变量：两种货币的利率和即期汇率。以前面的货币互换为例，作为美元的接收方，互换的价值为固定美元现金流的现值减去固定德国马克现金流的现值的美元价值，德国马克和美元的转换用即期汇率。货币互换的风险却不能用久期这样简单的概念来概括。

互换也可以看成一系列远期合约。作为例子，考虑一个两年期，每季度交割一次现金流的互换合约，一方支付固定利率 6%，同时接受一个 3 个月期的 LIBOR。互换相当于双方约定在一系列时间点交换现金流。因此互换可以看成是一系列远期合约，每个远期合约用固定利率的现金流（相当于远期合约的交割价）去交换浮动利率的现金流（相当于远期合约的标的资产）。这种远期合约也叫远期利率合约（forward rate agreement, FRA）。一个远期利率合约相当于只在一个时间交换现金流的互换合约。

由于互换合约可以看成是一系列远期合约的组合，而远期合约又可以看成是一个看涨期权的多头和一个看跌期权的空头，因此互换也可以看成是一系列期权合约的组合。

6.3 互换的定价

6.3-1 利率互换的定价

首先讨论利率互换的定价。互换的浮动利率确定方式一旦确定，互换的定价问题就是怎样计算出互换的固定利率使互换的价值为零。互换的定价可以依据利率的期限结构。假定利率的期限结构以一系列不付息债券的半年复利一次的收益率表示为：

$$(y_t^{(1)}, y_t^{(2)}, \dots, y_t^{(n)})$$

由此计算出各期的远期利率为：

$$(f_t^{(0 \rightarrow 1)}, f_t^{(1 \rightarrow 2)}, f_t^{(2 \rightarrow 3)}, \dots, f_t^{(n-1 \rightarrow n)})$$

其中 $f_t^{(i \rightarrow i+1)}$ 代表远期利率，下标 t 代表现在，上标 $(i \rightarrow i+1)$ 代表远期利率的期间。一个 $n/2$ 年后到期的，以半年期 LIBOR 为浮动利率的利率互换，其固定利率 x 由下面方程确定：

$$\begin{aligned} NP &\times \left[\frac{f_t^{(0 \rightarrow 1)}/2}{\left(1 + \frac{y_t^{(1)}}{2}\right)} + \frac{f_t^{(1 \rightarrow 2)}/2}{\left(1 + \frac{y_t^{(2)}}{2}\right)^2} + \dots + \frac{f_t^{(n-1 \rightarrow n)}/2}{\left(1 + \frac{y_t^{(n)}}{2}\right)^n} \right] \\ &= NP \times \left[\frac{x/2}{\left(1 + \frac{y_t^{(1)}}{2}\right)} + \frac{x/2}{\left(1 + \frac{y_t^{(2)}}{2}\right)^2} + \dots + \frac{x/2}{\left(1 + \frac{y_t^{(n)}}{2}\right)^n} \right] \end{aligned}$$

其中 NP 为名义本金。

例 6.3 利率的期限结构以零息票债券收益率和远期利率表示。如表 6.3,由此确定一个 5 年期、名义本金为 25 万的大众型利率互换的固定利率。

表 6.3 零息票债券的收益率和半年期远期利率

到期日(年)	收益率 (半年复利一次的名义年利率,%)	远期利率 (半年期复利一次的名义年利率,%)
0.5	6.14	6.14
1	6.32	6.5
1.5	6.42	6.61
2	6.51	6.81
2.5	6.71	7.52
3	6.91	7.9
3.5	7.14	8.53
4	7.44	9.55
4.5	7.77	10.5
5	8.12	11.2

该大众型利率互换的固定利率由下式确定：

$$\begin{aligned} 25 \times \frac{1}{2} \times & \left[\frac{6.14\%}{(1+6.14\%/2)} + \frac{6.61\%}{(1+6.32\%/2)^2} + \frac{6.81\%}{(1+6.42\%/2)^3} \right. \\ & \left. + \cdots + \frac{11.2\%}{(1+8.12\%/2)^{10}} \right] \\ = 25 \times \frac{1}{2} \times & \left[\frac{x}{(1+6.14\%/2)} + \frac{x}{(1+6.32\%/2)^2} + \frac{x}{(1+6.42\%/2)^3} \right. \\ & \left. + \cdots + \frac{x}{(1+8.12\%/2)^{10}} \right] \end{aligned}$$

解得：

$$x = 8.20\%$$

6.3-2 货币互换的定价

下面再讨论货币互换的定价。与利率互换不同，货币互换交换本金，前面说过，货币互换可以看成不同币种债券的组合，然后再加上一个外汇市场交易。外汇市场的交易是在今天完成的，不会影响到互换的定价。因此可以通过不同币种的债券组合对货币互换进行定价。下面以一个例子来说明。

例 6.4 假定两个公司，A 和 B，具有同样的信用等级，都可以到国际资本市场进行筹资。再假定这两个公司都可以发行 3 年期的浮动利率的美元和德国马克债券，浮动利率分别是 1 年期的美元 LIBOR 和德国马克 LIBOR。现在的 1 年

期德国马克 LIBOR 的浮动利率是 9%，1 年期美元 LIBOR 的浮动利率是 4%。两个公司也可以发行等面值的德国马克或美元固定利率债券，其收益率或息票率如表 6.4 所示。可以看到德国马克具有向下的利率期限结构，而美元的利率期限结构是向上的。根据表 6.4 可以计算出两种币值债券隐含的零息票债券的收益率，见表 6.5。还可以计算出两种币种债券在各年的远期利率，见表 6.6。

表 6.4 固定利率债券的到期日和收益率

到期日(年)	德国马克债券的收益率(%)	美元债券的收益率(%)
1	6	4
2	5	5
3	4	6

表 6.5 零息票债券的到期日和收益率

到期日(年)	德国马克债券的收益率(%)	美元债券的收益率(%)
1	6	4
2	4.97	5.0252
3	3.95	6.0829

表 6.6 两种币值债券的远期利率

到期日(年)	德国马克债券的远期利率(%)	美元债券的远期利率(%)
1	6	4
2	3.96	6.0605
3	1.92	8.2304

有了零息票债券的收益率和远期利率，德国马克互换的固定利率满足下面方程：

$$\left[\frac{6\%}{1.06} + \frac{3.96\%}{(1.0497)^2} + \frac{1.92\%}{(1.0395)^3} \right] = \left[\frac{x}{1.06} + \frac{x}{(1.0497)^2} + \frac{x}{(1.0395)^3} \right]$$

解得：

$$x = 4.5\%$$

而美元互换的固定利率满足方程：

$$\left[\frac{4\%}{1.04} + \frac{6.0605\%}{(1.050252)^2} + \frac{8.2304\%}{(1.060829)^3} \right] = \left[\frac{x}{1.04} + \frac{x}{(1.050252)^2} + \frac{x}{(1.060829)^3} \right]$$

解得：

$$x = 6\%$$

计算结果总结如下：

币种	固定利率(%)	浮动利率(%)
美元	6	LIBOR
德国马克	4.5	LIBOR

这样,每个公司都可以选择负债方式和币种,或两种负债方式的互换。假定两方进行一个互换,一方支付固定利率的美元现金流,另一方支付浮动利率(LIBOR)的德国马克,由计算结果可以知道,美元固定利率应该是6%。

6.4 互换的应用

近年来,互换日益成为公司管理资产负债现金流的重要工具。与其他金融工具相比,互换有以下优点:如果公司暴露在利率或汇率风险下,互换是一个低费用的风险管理工具,互换可以有效地改变资产或负债的风险暴露,并且不改变企业的盈利能力;公司在发行债券时,往往签订一个互换合约,以降低融资成本,或提高投资者的收益率。

6.4-1 资产负债风险管理缺口管理

在现代经济中,利率、汇率一般由市场供求决定,未来的利率、汇率是不确定的,很多公司机构都面临着利率、汇率风险。假定一个公司的兼并重组资金来自于银行短期借款,利率的波动对资金的成本具有重要影响,如果利率上升,公司借款成本就要增加;利率下降,公司借款成本下降。再假定另外一个公司,产品市场在国外,如果本国货币走强,公司的以本币计算的销售收入就会下降;反之,公司的盈利就会增加。公司面对着风险暴露,可以选择接受风险作为公司正常经营的一部分,希望利率或汇率的变化向有利于公司的方向发展,如果利率或汇率的变化向相反方向发展,公司也能够承受损失。公司也可以选择对冲风险。对冲风险有两种选择:改变公司资产负债结构,使风险暴露为零,但这样做往往会影响公司的盈利;或者,使用互换来管理公司的风险。

例 6.5 假定一个金融公司 F,其简化的资产负债表如表 6.7 所示。

可以分别算出资产、负债的久期为:

$$D_{\text{资产}} = \frac{100}{1000} \times 0.00 + \frac{400}{1000} \times 4.17 + \frac{500}{1000} \times 4.73 \\ = 4.03(\text{年})$$

$$D_{\text{负债}} = \frac{600}{900} \times 1.00 + \frac{300}{900} \times 7.00 \\ = 3.00(\text{年})$$

表 6.7 F 公司的资产负债表

	市场价值(万元)	久期(年)
资产		
现金	100	0.00
5 年期贷款(假定现在价格等于面值, 收益率为 10%)	400	4.17
10 年期平行支付的抵押贷款(按本金计算收益率为 10%)	500	4.73
资产总值	1 000	
负债		
5 年期浮动利率借款(浮动利率为 LIBOR, 当前的 LIBOR 是 8%)	600	1.00
7 年期(零付息债券, 收益率是 7%)	300	7.00
负债总值	900	
净资产	100	

资产、负债久期的缺口为:

$$\begin{aligned} D_{\text{缺口}} &= D_{\text{资产}} - \frac{\text{负债总值}}{\text{资产总值}} \times D_{\text{负债}} \\ &= 4.03 - \frac{900}{1000} \times 3.00 \\ &= 1.33(\text{年}) \end{aligned}$$

也可以用价值久期表示资产负债的利率风险缺口。计算出为:

$$\begin{aligned} \text{价值久期缺口} &= \text{资产总值} \times D_{\text{资产}} - \text{负债价值} \times D_{\text{负债}} \\ &= 1.330 \end{aligned}$$

资产负债久期缺口为正, 说明公司的资产负债具有利率风险, 1.33 年的久期缺口意味着公司的净资产相当于一个到期日为 1.33 年的不付息债券。利率上升, 净资产价值下降; 利率下降, 净资产价值上升。

如果不对利率风险进行管理, 公司必须能够承受利率上升导致的公司净资产价值下降的风险, 否则的话, 必须对利率进行管理。一种常见的方法是对资产负债结构进行调整, 为了使久期缺口为零, 有两种方法可供选择: 缩短资产的久期, 或增加负债的久期。要想缩短资产的久期, 就要卖掉一部分对外贷款的资产组合, 而转为持有现金。对外贷款组合的久期为:

$$\begin{aligned} D_{\text{loan}} &= \frac{400}{900} \times 4.17 + \frac{500}{900} \times 4.73 \\ &= 4.48(\text{年}) \end{aligned}$$

记为了使久期缺口为零, 需要持有的现金数量为 \bar{w}_{cash} , 则有:

$$D_{\text{gap}} = [\bar{w}_{\text{cash}} \times 0.00 + (1 - \bar{w}_{\text{cash}}) \times 4.48] - \frac{900}{1000} \times 3.00 = 0$$

解得:

$$\bar{w}_{\text{cash}} = 40\%$$

即公司应该把价值 300 的贷款组合转换成现金。调整后，公司持有现金 400 元，由于现金不盈利，能够用于盈利的资产只有 600 元。调整后虽然公司的利率风险暴露没有了，但公司的盈利能力也下降了许多。

既能够控制利率风险，又不降低盈利能力的最好方法是用互换进行风险管理。由于公司的负债中有一个浮动利率债券，可以采用互换增加负债的久期。假定公司可以签订这样一个利率互换：5 年期，支付 LIBOR，接收 8% 的固定利率。而 5 年期的息票率为 8% 的固定利率借款的久期是 4.31 年（收益率也按 8% 计算）。浮动利率借款和互换的组合相当于一个固定利率借款，现在就要确定互换合约的名义本金数量使久期缺口为零。名义本金数量 P_{swap} 应该满足：

$$D_{swap} = 4.03 - \frac{900}{1000} \times \left[\frac{600 - P_{swap}}{900} \times 1.0 + \frac{P_{swap}}{900} \times 4.31 + \frac{300}{900} \times 7.0 \right] = 0$$

解得：

$$P_{swap} = 402$$

6.4-2 资产和负债现金流的匹配

互换还可用于以外币表示的资产和负债之间的匹配。

例 6.6 G 公司是一家瑞士公司，每年需要从法国进口大量的原材料用于生产。假定公司新签订一个 3 年期供货合同，每年要向供货方支付 50 万法国法郎。显然，法国法郎和瑞士法郎的汇率对公司的经营业绩有重大影响。瑞士法郎升值，公司盈利扩大，瑞士法郎贬值，公司业绩受损。根据对汇率的估计，瑞士法郎贬值的可能性很大，公司需要对汇率风险进行管理。假定公司用于支付供货合同的资金主要来自于在国内债券上的投资，降低汇率风险的办法之一是把这些债券卖掉，用所得资金来购买法国法郎债券。这样做可能导致较大的交易成本。另一种办法是借用互换合约。假定在互换市场上，公司可以签订一个 7.5% 瑞士法郎利率对 6.6% 法国法郎利率的互换。由于供货合同每年的现金流需要量是 50 万法国法郎，互换的名义本金应是：

$$\frac{50}{6.6\%} = 757.6(\text{万法国法郎})$$

假定当前的汇率是每法国法郎可交换 0.25 瑞士法郎，瑞士法郎的名义本金为：

$$757.6 \times 0.25 = 189.4(\text{万瑞士法郎})$$

6.4-3 套利

互换也往往用来套利。在不同的金融市场上，价格可能存在着不一致，由于互换可以把金融市场的各个部分有机地联系起来，互换可以利用这种不一致在资本

市场上达到套利目的。但现在用于套利目的互换并不多。

例 6.7 两个公司都在寻求 5 年期贷款。公司 AAA 具有很高的信用等级,根据公司财务经理的预测,短期利率可能下降,基于这种预测,公司希望以浮动利率贷款。而另一个公司 BBB,信用等级较低,公司的经营收入受利率影响较大,不希望承受利率大幅度变动的风险,希望以固定利率贷款。在资本市场上它们可以得到的浮动和固定利率贷款成本如表 6.8 所示。

表 6.8 固定利率和浮动利率贷款成本

	固定利率贷款成本	浮动利率贷款成本
公司 AAA	5 年期国债的收益率 +25 个基本点	LIBOR
公司 BBB	5 年期国债的收益率 +85 个基本点	LIBOR +30 个基本点
差别	60 个基本点	30 个基本点

公司 AAA 在固定和浮动利率市场上借款相对于公司 BBB 都具有优势,借款成本较低。但从比较优势上讲,公司 AAA 在固定利率市场上具有比较优势,而公司 BBB 在浮动利率市场上具有比较优势。两公司均可以利用利率互换分享比较优势 $60 - 30 = 30$ 个基本点。假定通过谈判,双方各分享 15 个基本点。双方可以签订一个互换合约:公司 AAA 向公司 BBB 支付浮动利率 LIBOR,作为交换,公司 BBB 向公司 AAA 支付 5 年期国债的收益率加上 40 个基本点。公司 AAA 在资本市场上以固定利率贷款,公司 BBB 在资本市场上借浮动利率贷款。贷款和互换的复合,公司 AAA 的资金成本是 LIBOR - 15 个基本点,公司 BBB 的借款成本是 5 年期国债的收益率 +60 个基本点。通过互换,两者都降低了借款成本。现金流交换的示意如图 6.6。

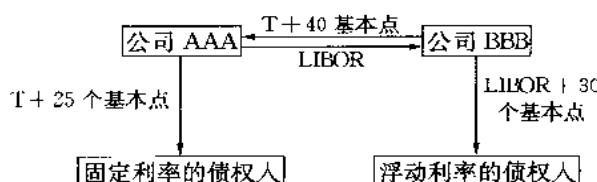


图 6.6 两个公司现金流交换示意图

还要一提的是,如果不考虑互换的信用风险,互换确实实现了在资本市场的套利。但互换是有信用风险的,如果某一方违约,套利目的就无法达到。所以互换实现的并不是真正意义上的套利。

利用货币互换也能实现这种套利行为。假定一个美国养老基金公司想购买面值是 10 万美元的 7 年期国债,而在美国国债市场上,7 年期平价国债的收益率是 8.00%。而具有相同到期日的英国平价国债的收益率是 9.50%。养老基金公司可以投资于国外资本市场和衍生证券市场。为了提高投资的收益率,基金公司可以选择购买英镑国债,然后再用货币互换把现金流转换成美元。假定基金公司可以在互换市场签订一个 7 年期互换,按年利率 9.42% 支付英镑,按年利率 8% 收到美元。本金按当前的即期汇率 1.4 美元交换 1 英镑计算。养老基金公司的现金流

如表 6.9 所示。与直接购买美元债券相比,购买英镑债券和互换合约使现金流增加了 60 英镑,从而提高了投资的收益率。

表 6.9 养老基金公司的现金流

年	货币互换			
	债券收入 (万英镑)	现金流入 (万美元)	现金流出 (万英镑)	净现金流 (万美元+万英镑)
0	7.143	-10	7.143	-10+0
1	0.679	0.80	0.673	0.80+0.006
2	0.679	0.80	0.673	0.80+0.006
3	0.679	0.80	0.673	0.80+0.006
4	0.679	0.80	0.673	0.80+0.006
5	0.679	0.80	0.673	0.80+0.006
6	0.679	0.80	0.673	0.80+0.006
7	0.679+7.143	0.80+10	0.673+7.143	10.80+0.006

本章小结

本章介绍了互换、互换的定价及其应用,重要概念及公式有:

- (1) 利率互换,货币互换的定义,现金流的计算,互换的优点。
- (2) 互换与债券、远期、期权的关系。
- (3) 互换定价的两种方式:利用利率期限结构进行定价;利用可比的互换进行定价。
- (4) 互换的重要应用:资产负债利率风险缺口管理;资产负债现金流的匹配;套利等。

复习与思考

1. 某银行的资产负债表如下,其中所有资产的价值等于其面值。

资产负债表			
	资产与负债	市场价值	久期
资产			
现金		200	0.00
10 年期,息票率为 10% 的对外贷款		800	4.17
资产总计		1 000	
负债			
6 年期浮动利率借款(浮动利率为 1 年期 LIBOR)		500	1.00
6 年期,息票率为 8% 的债券		350	5.00
负债总计		850	
净资产		150	

- (1) 计算该银行资产的久期,负债的久期,及净资产的久期,并对该银行的利率风险进行讨论;
- (2) 假定该银行试图达到净资产的零利率风险,方法是对资产负债进行重新调整,降低资产的久期,请问应该卖掉多少对外贷款组合,而改持有现金?这样做对盈利能力会造成怎样的影响?
- (3) 为达到净资产的零利率风险,采用延长负债的久期的方法,通过一个互换可以把6年期浮动利率借款转化为6年期固定利率借款。银行可以签订的互换的固定利率为8%,请问银行签订的互换的名义本金应该多大?
2. 公司考虑签订一个特殊的互换,它的名义本金随着时间逐步降低。互换的现金流每6个月交换一次,浮动利率是6个月期的国债收益率。刚开始名义本金为100,一次现金流交换以后,名义本金变为75,第二次变为50,最后一次现金流的名义本金为25。当前的本金为1的不付息债券的价格为:

到期日(年)	债券价格
0.5	0.95
1.0	0.90
1.5	0.85
2.0	0.80

请问这个特殊互换的名义本金应该是多少?

参考文献

- Bruce Tuckman, 1996, *Fixed Income Securities*, John Wiley & Sons, Inc. .
- D. Backus, S. Foresi and C. Telmer, 1997, "Discrete-Time Models of Bond Pricing," *National Bureau of Economic Research, Working Paper* 6736.
- E. Fama and R. Bliss, 1987. "The Information in Long-Maturity forward Rates," *The American Economic Review*, September: 680—92.
- Frank Fabozzi, 1995, *Fixed Income Mathematics*, IRWIN Professional Publishing (Third edition).
- Hans R. Stoll and Robert E. Whaley, 1993, *Futures and Options*, South-Western Publishing Co..
- John Cochrane, 2001, *Asset Pricing*, Princeton University Press.
- John Cox, 1999, *Investment Banking*, MIT Transparency.
- Keith Brown and Donald Smith, 1995, *Interest Rate and Currency Swaps*, The Research Foundation of The Institute of Chartered Financial Analysis.

Oliver Grandville, 2001, *Bond Pricing and Portfolio Analysis*, The MIT Press.
Suresh M. Sundaresan, 1997, *Fixed Income Markets and Their Derivatives*,
South-Western College Publishing.

第2篇

**股票期权
及其定价**

1973 年提出的 Black-Scholes 期权模型被认为是现代金融理论最重要的成果之一,Black-Scholes 期权定价公式在实践中也得到广泛的应用。此外,20 世纪 80 年代由约翰·考克斯(John Cox)等人发展的二叉树方法在金融工程界也得到高度评价,它几乎可以解决任何期权的定价问题。期权定价方法也是评价复杂衍生证券价值的基本方法。

本篇主要以股票期权为对象介绍期权基本定义、性质、交易策略和定价方法。在期权的定价中,首先引进相对容易理解的二叉树方法,在二叉树方法的基础上,引进期权定价的 Black-Scholes 模型。在这里我们采取了与其他有关期权定价的论著不同的思路,即既不引进随机微积分,也不引进复杂的概率分布函数推导,只是简单地把二叉树方程连续化来得到 Black-Scholes 期权定价方程,这一思路就像从离散复利到连续复利一样直观。

股票期权的一些基本概念

7.1 股票期权

期权是金融工具中比较独特的—种,它使买方能够从好的结果中获利,同时却能避免坏的结果。虽然人们使用各种各样的期权已经有几百年的历史,但是包括股票期权在内的金融期权交易是在20世纪70年代才创立的。1973年美国的芝加哥期权交易所(Chicago Board Options Exchange, CBOE)首先开设了股票期权的交易。到20世纪80年代,金融期权得到了广泛的应用,此后,金融期权市场开始迅猛发展。以美国最大的从事股票期权交易的芝加哥期权交易所(CBOE)为例,1973年刚开展股票期权交易时,全年累计的股票期权交易额为4.5亿美元,而到了1999年,CBOE全年累计的期权交易额超过2430亿美元,其中股票期权交易额为1240多亿美元,按全年252个交易日计算,平均每天的交易额就达到9.6亿美元(其中股票期权交易额为4.7亿美元),仅一天的交易额就超过当时全年累计金额。

从本章开始,我们要介绍有关期权的定价和交易策略方面的内容。在此之前,我们先回顾一下有关期权的一些基本概念。

7.1-1 期权合约

一份期权就是一份合约,它赋予合约的一方即期权的购买者(也称期权的持有者,option holder)一种权利,一种在指定的时间内,以确定的价格购买或出售一定数量的某种商品的权利。与其他类型的合约不同的是,期权的持有者在享有权利的同时,不需要承担义务,当期权到期时,期权持有者可以选择行使合约赋予他的权利,或者放弃权利。而合约的另一方,即期权的出售者(option writer,有时也称为期权提供者,option grantor)却只承担责任而不享有权利,也就是说,当期权持有者选择行使合约赋予他的权利时,期权的出售者就必须履行他的义务,按确定的价格将某种商品出售给期权持有者或从期权持有者处购买某种商品。可见,在期权合约中,双方的权利和义务不是对等的,由于不需要承担责任的权利是具有价值的,为了使对方愿意接受合约规定的义务,期权的购买者必须支付给出售一方一定

的费用,这笔费用称为期权费(premium)。

一份期权合约通常要包含以下几个要素:

(1) 标的资产(underlying asset)。

标的资产就是期权合约所指定的双方将来要交易的某种商品,它可以是某种实物资产,也可以是某种金融资产,比如某种等级的小麦,或者是某个公司的普通股股票。一般来说,与期货的标的资产一样,能够作为期权合约的标的资产的商品,必须具有流通量大、交易活跃、易于确定等级等特点。

(2) 到期日(expiration date)。

期权合约所赋予的权利是有期限的,一旦超过这个期限,期权就将失效,因此,在期权的到期日,期权持有者必须决定是否要行使权利。一般来说,在进行期权的报价时,往往用到期月的形式给定到期日,例如在 CBOE 交易的股票期权,其确切到期日是在到期月的第三个星期五之后紧接的那个星期六。后面我们会发现,知道确切的到期日对确定期权的价值是非常重要的,尤其是当期权快要到期的时候,几天的剩余时间的差别可能造成期权价值的巨大差异。

(3) 执行价格(exercise price)。

执行价格有时也称为履约价格(strike price),是在期权合约中规定的,将来用于交易标的资产的价格,也就是说,期权合约的持有者有权按照期权合约所规定的执行价格购买或出售一定数量的标的资产。对同一标的资产的期权,交易所可以指定不同的执行价格,具有不同的执行价格的期权,即使它们的标的资产是相同的,它们也属于不同的期权。例如,同样是以 IBM 公司普通股股票为标的资产的期权,它们的执行价格可以分别为 90 美元、95 美元、100 美元、105 美元等。对于股票期权,交易所通常规定,当股票价格低于 25 美元时,执行价格的变动间隔为 2.5 美元,当股票价格高于 25 美元而低于 200 美元时,执行价格的变动间隔为 5 美元,而当股票价格高于 200 美元时,执行价格的变动间隔为 10 美元。引入新的期权时,交易所通常选择具有最接近股票现价的执行价的两个期权进行交易。例如,当交易所开始交易 10 月份到期的 XYZ 公司股票期权时,XYZ 公司的股票市场价格为 102 美元,那么交易所就提供执行价格为 100 美元和 105 美元的两个期权给投资者进行交易,如果 XYZ 公司股票的市场价格上升到超过 105 美元,则交易所再提供执行价格为 110 美元的期权,这样,同时在交易所交易的 10 月份到期的 XYZ 公司股票的期权就有三个不同的执行价格。

(4) 合约的规模(size)。

期权合约还必须要指明期权持有者在行使权利时可以购买或出售的资产的数量。这是非常重要的,因为期权持有者在行使权利时获取的是标的资产的市场价格和执行价格之间的差价,如果不规定他可以购买或出售的标的资产的数量,那么,标的资产的市场价格和执行价格之间即使非常微小的差价,也能给他带来巨大的收益,而同时将使期权提供者遭受巨大的损失。

(5) 买权或卖权(call or put)。

期权合约规定期权持有者拥有的权利是购买标的资产或是出售标的资产。按

确定价格购买标的资产和按确定价格出售标的资产是两种不同的权利,因此,赋予持有者购买标的资产权利的期权和赋予持有者出售标的资产权利的期权是两种不同的期权。赋予持有者购买标的资产权利的期权我们称为看涨期权(call option),赋予持有者出售标的资产权利的期权我们称为看跌期权(put option)。

(6) 美式或欧式(American style or European style)。

还有一点在期权合约中需要指明的是,期权持有者是否可以在期权到期日之前行使权利。我们把可以在到期日前执行的期权称为美式期权(American option),而只能在到期日执行的期权称为欧式期权(European option)。股票期权一般是美式的,也就是说,期权的持有者可以在到期日之前的任何交易日提前行使合约赋予他的权利,当然,如果提前行使了权利,则期权合约也就提前结束了。

7.1-2 期权的种类

作为衍生工具中的一大类,期权又可以分为不同的种类。针对期权合约的不同要素,我们可以用不同的方法对期权进行分类:

(1) 按照标的资产的类型,期权可分为商品期权和金融期权。其中商品期权又可分为农产品期权、金属期权、能源期权等;金融期权又可分为股票期权、股票指数期权、外汇期权、利率期权、期货期权等。

(2) 按照合约所赋予的权利的性质,期权可分为看涨期权和看跌期权。看涨期权也称为买权,或认购期权,它赋予期权持有者购买标的资产的权利;看跌期权也称为卖权,或认沽期权,它赋予期权持有者出售标的资产的权利。

(3) 按照可行使权利的时间,期权可分为美式期权和欧式期权。其中,美式期权可以在到期日前的任何交易日执行,而欧式期权只能在到期日执行。

另外,按照立即执行期权可以给期权持有者带来的损益情况,期权也可分为实值期权(in-the-money options)、虚值期权(out-of-the-money options)和两平期权(at-the-money options)。其中,如果立即执行期权可以给期权持有者带来正的收入的话,该期权就称为实值期权;如果立即执行期权将给期权持有者带来正的损失的话,该期权就称为虚值期权;如果立即执行期权给期权持有者带来的损益为零的话,该期权就称为两平期权。注意,由于标的资产的市场价格随时在变化,立即执行期权可以给期权持有者带来的损益情况也会随时变化,因此,实值期权、虚值期权和两平期权并不是绝对的,随着时间的推移,实值期权可能会变成虚值期权,虚值期权也可能会变成实值期权。而按照上述三种分类法,一个期权会确定地属于某一类,不会变化。

7.1-3 期权的有关价格

在考虑一份期权时,通常要考虑到以下几个价格,对这些价格应严格加以区分,以免混淆:

(1) 标的资产价格。

一般来说,在许多情况下,尤其是在金融期权的情况下,期权的标的资产往往也是在市场上公开交易的,投资者可以随时观测到它的成交价格,这就是标的资产的价格。标的资产的市场价格是随着市场状况的变动而随时变化的。从理论上讲,在期权合约的交易中可以不需要指明标的资产的当前价格,事实上,由于标的资产的价格随时都在变化,而同一份期权合约又会在不同的时候进行许多次的交易,因此在期权合约中不可能注明标的资产的当前市场价格。但是,由于期权的到期盈亏状况取决于期权到期时标的资产的市场价格,而到期时标的资产的市场价格与标的资产的当前价格之间必然存在很强的关联,因此标的资产的当前价格与期权本身的价值有非常大的关系,在进行期权交易时,或者说,在进行期权定价时,是必须要加以考虑的。

(2) 执行价格。

执行价格是在期权持有者行使权利时,双方交易标的资产时所采用的价格。执行价格也是关于标的资产的价格,但不是由市场决定的,而是由期权合约所规定的。一份期权的执行价格是保持不变的,在期权的交易过程中不会随时间和市场状况变动而变化。

由于标的资产的市场价格随时都在变化,而执行价格始终保持不变,因此随着时间的推移,两者之间的高低关系也可能不断地变化。这两者之间的高低关系就决定了期权持有者可通过执行期权获得的利益。很显然,作为期权合约的持有者,只享有权利而不承担义务,因此只有当有利可图的时候才会行使权利,如果行使权利反而会使自己遭受损失的话,他毫无疑问会放弃使用该权利。对看涨期权的持有者来说,只有当标的资产的市场价格高于执行价格时(此时期权为实值),才可能行使权利,而当标的资产的市场价格低于执行价格时(此时期权为虚值),不可能行使权利,当标的资产的市场价格等于执行价格时(此时期权为两平状态),行使权利也没有意义。对看跌期权的持有者来说,只有当标的资产的市场价格低于执行价格时(此时期权为实值),才可能行使权利,而当标的资产的市场价格高于执行价格时(此时期权为虚值),不可能行使权利,当标的资产的市场价格等于执行价格时(此时期权为两平状态),行使权利也没有意义。

注意,尽管当期权处于虚值或两平状态时,期权持有者不会行使权利,但这并不表示虚值期权或两平期权没有价值,只要期权还没有到期,随着标的资产市场价格的变化,期权还是有可能变化到实值状态的。

(3) 期权价格。

期权价格是指在签订一份期权合约或转让期权合约时,期权的购买者为了得到这样一份权利而向期权的出售者支付的一笔费用,也称为期权费。期权价格反映的是合约所赋予期权持有者的权利的价值,期权合约在交易所公开交易,也就是该权利的转让过程。由于各种因素随市场状况变化,该权利的价值也不断变化,因此期权价格也是随市场而变化的,期权交易所会随时提供每个期权最新的交易价格。

7.1-4 期权的交易

期权的交易与期货的交易有不少相似之处,比如都是在特定的交易所中进行,有结算所和保证金制度等,但期权与期货毕竟是有很大差别的,两者的交易过程中还是存在不同的特点的。

(1) 期权交易所和清算所。

期权交易所与期货交易所相似,它负责组织进行期权的交易。期权交易所除了提供进行期权交易的场所之外,还负责制订标准化的期权合约的详细条款,规范交易行为,记录并向外反馈期权的价格信息。

期权清算所的功能也类似于期货交易中的结算所,它的作用是确保期权出售方按照合约规定履行义务,同时,它还负责记录所有的多头和空头头寸。

(2) 保证金。

在期货交易中,交易的双方都必须在保证金账户中存入一笔保证金,以确保履行合约,但是在期权交易中,由于权利和义务是分割的,只要能确保承担义务的一方,即期权的出售方将履行义务即可,因此,在期权交易中,只有期权的出售方才被要求在保证金账户中存入保证金,而期权的购买方是不需要交纳保证金的。但是,期权的购买方在购买期权时就应支付全额的期权费。

(3) 期权费。

在期货交易中,期货合约的设计使得合约对双方而言其价值为零,但是在期权交易中不可能做到这一点,对期权的购买方来说,期权的价值总是大于等于零的,而对期权的出售方来说,持有一个期权的空头头寸,其价值总是小于等于零的。因此,作为获得一份有价值的权利的代价,期权的购买方要支付一笔款项,而作为承担一份义务的补偿,期权的出售方应收入一笔款项,这一笔款项就是期权费,它应该在期权交易时由期权的购买方支付给期权的出售方。

(4) 场外交易。

由于期权在金融风险管理中具有独特的作用,受到越来越多金融机构和大公司的欢迎,依靠期权交易所开发设计的新的期权品种往往还无法满足期权交易者各种各样的需求,因此许多金融机构和大公司就直接进行期权交易。这种期权交易不在期权交易所中进行,因此称为场外交易或柜台交易(OTC)。

场外交易期权的主要优点是金融机构可以根据客户的特定需求来订立期权合约的条款,这样,这些期权实际上具有非标准化的特征,可以满足特定客户的具体需求。但是,这些期权的非标准化的特征同时也是它的主要缺点之一:由于它是针对某一客户的特定需求来订立期权合约的条款的,因此很难将该期权转让给另一方,也就是说,这种期权的流通性是很差的。另外,由于场外交易的期权是在金融机构与客户之间直接进行交易,没有期权交易所和清算所为履约提供保障,交易中存在一定的违约风险,因此只有在信誉卓著的大的金融机构和大公司之间才会进行期权的场外交易。

7.1-5 股票期权

如果期权的标的资产是某种股票,该期权就称为股票期权。股票期权赋予其持有者在到期日之前以事先确定的价格购买或出售一定数量某种股票的权利,投资者可以利用期权来使自己在股票市场上进行的投资行为得到很好的改善。利用股票期权的权利特性,投资者可根据自己的需要获得如下好处:

- (1) 在股票市场下滑情况下保持自己持有股票的价值;
- (2) 在持有股票现货下增加收入;
- (3) 可以计划在比较低的价格下购买股票;
- (4) 当知道市场会有很大变化,但不知道变化方向时,仍可获利;
- (5) 不需要通过买卖股票即可从股票价格变化中获利。

股票期权是最早开始交易的金融期权品种,由于其为投资者提供了诸多的便利,推出之后,其交易得到了迅猛的发展。尽管后来又推出了股指期权和货币期权等其他各种有很多优点的金融期权,目前股票期权的交易量仍非常大。

在美国进行股票期权交易的交易所有芝加哥交易所(CBOE)、费城交易所(PHLX)、美国股票交易所(AMEX)、太平洋股票交易所(PSE)和纽约股票交易所(NYSE)。交易最为活跃的是诸如IBM、通用电气、微软等公司的股票期权。

由于相对来说比较简单和直观,在下面的几个章节中,我们就以股票期权为例来讨论期权的定价和交易策略。

7.2 基本交易策略

下面我们以欧式股票期权为例,介绍期权的基本交易策略和到期损益状况。

7.2-1 期权的基本头寸

为了便于在下文中讨论各种交易策略的收益情况,我们首先引入以下记号:

t :期权交易时刻;

T :期权到期时刻;

S_t :股票现价;

S_T :期权到期日股票现价;

K :执行价;

c :看涨期权价格(t 时刻);

p :看跌期权价格(t 时刻);

r :无风险利率;

P_T :到期收益。

由于期权有看涨和看跌两种,每一合约有交易双方,因此期权的基本头寸有4种,即看涨期权多头、看涨期权空头、看跌期权多头、看跌期权空头。

(1) 看涨期权多头(long call)。

即买入看涨期权的一方。买入一方在购买期权时支付期权费 c ,这是他的成本,假设他能以无风险利率融资,考虑其融资成本,将他购买期权的成本折算到期权到期时,即 T 时刻,应为: $ce^{(T-t)r}$ 。

而在 T 时刻,若 $S_T > K$,则他应执行期权,获得收入为 $S_T - K$;若 $S_T \leq K$,则不执行期权,收入为零。因此,考虑了成本(包括融资成本)以后,看涨期权多头方的到期收益为:

$$\begin{aligned} P_T &= \begin{cases} -ce^{(T-t)r} + S_T - K & \text{如果 } S_T > K \\ -ce^{(T-t)r} & \text{如果 } S_T \leq K \end{cases} \\ &= -ce^{(T-t)r} + \max(S_T - K, 0) \end{aligned} \quad (7.1)$$

(2) 看涨期权空头(short call)。

即卖出看涨期权的一方。卖出一方在出售期权时收入期权费 c ,设他以无风险利率投资,期权费收入折算到期权到期时,即 T 时刻,应为: $ce^{(T-t)r}$ 。

而在 T 时刻,若 $S_T > K$,则期权会被执行,为了履行合约,他将损失 $S_T - K$;若 $S_T \leq K$,则期权不会被执行,无损失。因此,看涨期权空头方的到期收益为:

$$\begin{aligned} P_T &= \begin{cases} ce^{(T-t)r} - S_T + K & \text{如果 } S_T > K \\ ce^{(T-t)r} & \text{如果 } S_T \leq K \end{cases} \\ &= ce^{(T-t)r} - \max(S_T - K, 0) \end{aligned} \quad (7.2)$$

与看涨期权多头方的到期收益刚好相反。

(3) 看跌期权多头(long put)。

即买入看跌期权的一方。买入一方在购买期权时支付期权费 p ,这是他的成本,折算到期权到期时,即 T 时刻,应为: $pe^{(T-t)r}$ 。

而在 T 时刻,若 $S_T < K$,则他应执行期权,获得收入为 $K - S_T$;若 $S_T \geq K$,则不执行期权,收入为零。因此,考虑了成本以后,看跌期权多头方的到期收益为:

$$\begin{aligned} P_T &= \begin{cases} -pe^{(T-t)r} + K - S_T & \text{如果 } S_T < K \\ -pe^{(T-t)r} & \text{如果 } S_T \geq K \end{cases} \\ &= -pe^{(T-t)r} + \max(K - S_T, 0) \end{aligned} \quad (7.3)$$

(4) 看跌期权空头(short put)。

即卖出看跌期权的一方。卖出一方在出售期权时收入期权费 p ,折算到期权到期时,即 T 时刻,应为: $pe^{(T-t)r}$ 。

而在 T 时刻,若 $S_T < K$,则期权会被执行,为了履行合约,他将损失 $K - S_T$;若 $S_T \geq K$,则期权不会被执行,无损失。因此,看跌期权空头方的到期收益为:

$$\begin{aligned}
 P_T &= \begin{cases} pe^{(T-t)r} - K + S_T & \text{如果 } S_T < K \\ pe^{(T-t)r} & \text{如果 } S_T \geq K \end{cases} \\
 &= pe^{(T-t)r} - \max(K - S_T, 0) \quad (7.4)
 \end{aligned}$$

与看跌期权多头方的到期收益刚好相反。

图 7.1 即反映了期权的 4 种基本头寸的到期收益随到期时股价的变化情况。

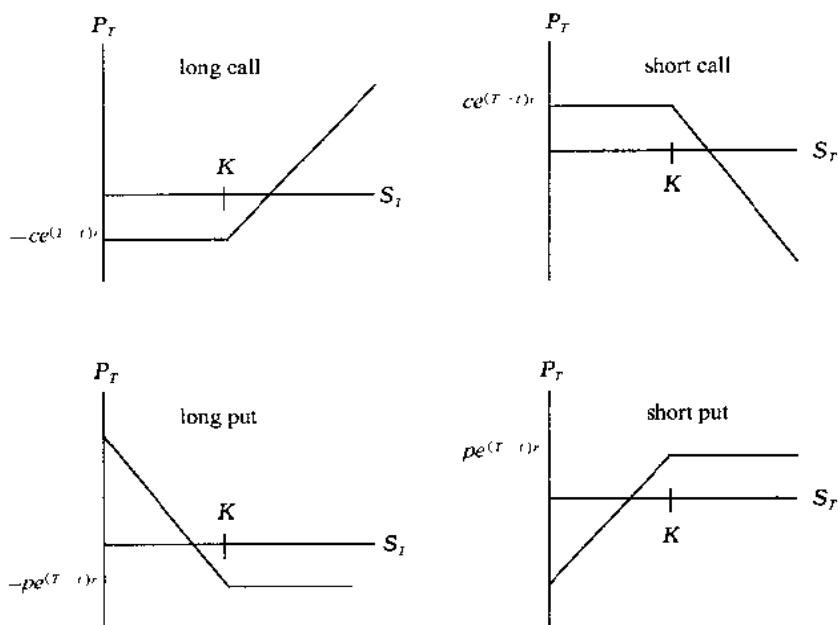


图 7.1 期权基本头寸的到期收益

7.2-2 最简单的期权交易策略

一种最简单的期权交易策略就是持有上述 4 种基本头寸中的一种，其损益状态在前面已叙述过了。

另一种最简单的交易策略由一个期权基本头寸和一个股票现货头寸组成。利用前面的记号，我们知道一个股票现货多头头寸的到期收益为：

$$P_T = -S_t e^{(T-t)r} + S_T \quad (7.5)$$

而一个股票现货空头头寸的到期收益为：

$$P_T = S_t e^{(T-t)r} - S_T \quad (7.6)$$

出于抵消风险的考虑，股票现货多头一般与看涨期权空头或看跌期权多头组合，而股票现货空头一般与看涨期权多头或看跌期权空头组合，由此，一个期权基本头寸和一个股票现货头寸可构成以下 4 种交易策略：

(1) 股票现货多头加看涨期权空头(long stock + short call)
利用前面的结论,可知该策略的到期收益为:

$$P_T = -S_t e^{(T-t)r} + S_T + ce^{(T-t)r} - \max(S_T - K, 0) \quad (7.7)$$

(2) 股票现货多头加看跌期权多头(long stock + long put)
利用前面的结论,可知该策略的到期收益为:

$$P_T = -S_t e^{(T-t)r} + S_T - pe^{(T-t)r} + \max(K - S_T, 0) \quad (7.8)$$

(3) 股票现货空头加看涨期权多头(short stock + long call)
利用前面的结论,可知该策略的到期收益为:

$$P_T = S_t e^{(T-t)r} - S_T - ce^{(T-t)r} + \max(S_T - K, 0) \quad (7.9)$$

(4) 股票现货空头加看跌期权空头(short stock + short put)
利用前面的结论,可知该策略的到期收益为:

$$P_T = S_t e^{(T-t)r} - S_T + pe^{(T-t)r} - \max(K - S_T, 0) \quad (7.10)$$

以上4种交易策略的到期损益图见图7.2。从图中我们可以看出,一个股票的现货头寸加一个期权的基本头寸构成的组合,其到期损益状态的形状近似于另一个期权的基本头寸。比如,股票现货多头加看涨期权空头就近似于看跌期权的空头,股票现货多头加看跌期权多头就近似于看涨期权的多头,等等。

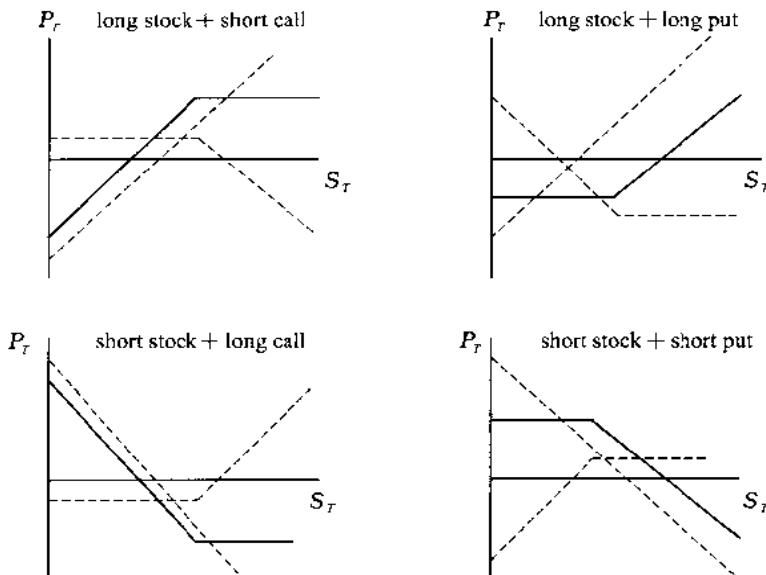


图7.2 简单期权交易策略的到期收益

7.2-3 差价期权

差价期权(spread)是指这样一种交易策略,即持有两个或两个以上看涨期权头寸,或持有两个或两个以上看跌期权头寸。也就是说,差价期权是单纯由看涨期权头寸或单纯由看跌期权头寸构成的一种期权交易策略。根据构成差价期权的不同期权的差异,我们把差价期权分为以下几种:

(1) 垂直差价期权。

垂直差价期权(vertical spread)指构成差价期权的各个期权头寸具有相同的到期日,但执行价格不同。根据垂直差价期权的到期收益情况,又可分为牛市差价期权(bull spread)、熊市差价期权(bear spread)和蝶式差价期权(butterfly spread)。

① 牛市差价期权。

考虑由一个执行价格为 K_1 的看涨期权多头和一个执行价格为 K_2 的看涨期权空头组成的交易策略,其中 $K_1 < K_2$ 。根据上一小节的结论,我们知道,该策略的到期收益为:

$$\begin{aligned} P_T &= -c_1 e^{(T-t)r} + \max(S_T - K_1, 0) + c_2 e^{(T-t)r} - \max(S_T - K_2, 0) \\ &= \begin{cases} (c_2 - c_1) e^{(T-t)r} & \text{如果 } S_T < K_1 \\ (c_2 - c_1) e^{(T-t)r} + S_T - K_1 & \text{如果 } K_1 \leq S_T < K_2 \\ (c_2 - c_1) e^{(T-t)r} + K_2 - K_1 & \text{如果 } K_2 \leq S_T \end{cases} \quad (7.11) \end{aligned}$$

其中, $c_2 - c_1 < 0$ (关于期权价格大小的比较见后面章节),实际上是构成该交易策略的初始成本,而到期时,可能获得的最大收入为 $K_2 - K_1$ 。当 $K_1 < S_T < K_2$ 时,该策略的到期收益随 S_T 的增加而增加,因此称为牛市差价期权。

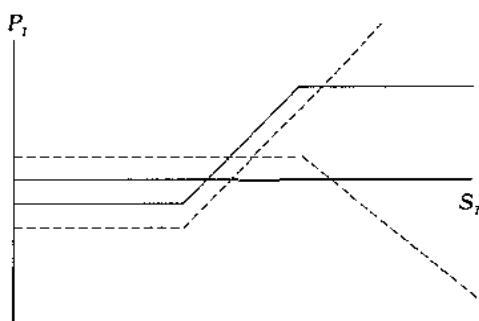


图 7.3 看涨期权构造的牛市差价期权

从该策略的到期收益图(图 7.3)中,我们可以看到,与直接投资于股票本身相比,该策略使投资者在股价剧烈下跌时避免过大损失,但同时也限制了投资者在股价大幅上升时获得大量收益。因此当投资者预计股价将温和上升,但同时又担心股价可能剧烈下跌时可采用此策略。

那么投资者为什么不直接购买一个看涨期权,即持有一个看涨期权多头而不持有看跌期权空头呢?这样,既能够避免在股价剧烈下跌时的过大损失,同时又能无限制地在股价大幅上升时获得大量收益,何乐而不为呢?原因在于持有一个期权多头需要支付期权费,而持有一个期权空头则可以获得期权费的收入。在本例中,尽管出售看涨期权获得的期权费收入 c_2 小于购买看涨期权时支付的期权费 c_1 ,但是如此构建一个差价期权的成本显然要小于直接购买一个看涨期权的成本,因此,当投资者预期到 $S_T > K_2$ 的可能性不大时,宁可以放弃当 $S_T > K_2$ 时的潜在收益为代价来降低成本。

以上是利用看涨期权头寸建立的牛市差价期权,利用看跌期权头寸也可建立牛市差价期权,方法如下:持有一个执行价格为 K_1 的看跌期权多头和一个执行价格为 K_2 的看跌期权空头,其中 $K_1 < K_2$ 。同样,利用上一小节的结论,我们知道,该策略的到期收益为:

$$\begin{aligned} P_T &= -p_1 e^{(T-t)r} + \max(K_1 - S_T, 0) + p_2 e^{(T-t)r} - \max(K_2 - S_T, 0) \\ &= \begin{cases} (p_2 - p_1)e^{(T-t)r} + K_1 - K_2 & \text{如果 } S_T < K_1 \\ (p_2 - p_1)e^{(T-t)r} + S_T - K_2 & \text{如果 } K_1 \leq S_T < K_2 \\ (p_2 - p_1)e^{(T-t)r} & \text{如果 } K_2 \leq S_T \end{cases} \quad (7.12) \end{aligned}$$

其中, $p_2 - p_1 > 0$, 实际上是构成该交易策略的初始收入,而到期时,可能的最大支出为 $K_2 - K_1$ 。可见,用看涨期权构建的牛市差价期权在期初是有成本支出的,在到期时则可能有收入;而用看跌期权构建的牛市差价期权在期初是有收入的,在到期时则可能有支出。在考虑了期初的成本或收入后,两者的到期收益图具有相似的形状(见图 7.4)。

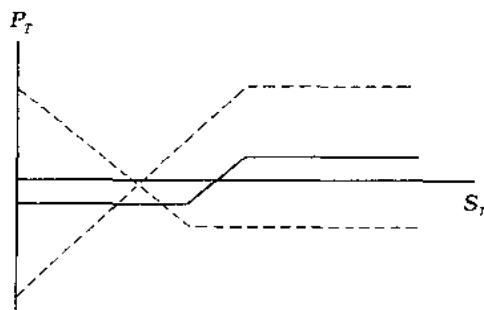


图 7.4 看跌期权构造的牛市差价期权

② 熊市差价期权。

与构建牛市差价期权的投资者的预期相反,当投资者预期股票价格将小量下跌,但同时又担心股价可能大幅上涨时,可采用牛市差价期权。因此,牛市差价期权实际上与牛市差价期权刚好相反。用看涨期权来构建的牛市差价期权为:

持有一个执行价格为 K_1 的看涨期权空头和一个执行价格为 K_2 的看涨期权多头,其中 $K_1 < K_2$ 。该策略的到期收益为:

$$\begin{aligned}
 P_J &= c_1 e^{(T-t)r} - \max(S_T - K_1, 0) - c_2 e^{(T-t)r} + \max(S_T - K_2, 0) \\
 &= \begin{cases} (c_1 - c_2)e^{(T-t)r} & \text{如果 } S_T < K_1 \\ (c_1 - c_2)e^{(T-t)r} + K_1 - S_T & \text{如果 } K_1 \leq S_T < K_2 \\ (c_1 - c_2)e^{(T-t)r} + K_1 - K_2 & \text{如果 } K_2 \leq S_T \end{cases} \quad (7.13)
 \end{aligned}$$

其中, $c_1 - c_2 > 0$ 。

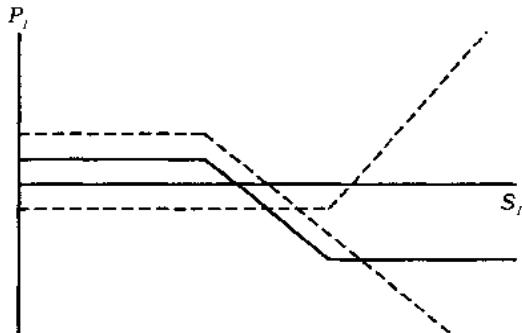


图 7.5 看涨期权构造的牛市差价期权

用看跌期权来构建的熊市差价期权为：

持有一个执行价格为 K_1 的看跌期权空头和一个执行价格为 K_2 的看跌期权多头, 其中 $K_1 < K_2$ 。该策略的到期收益为：

$$\begin{aligned}
 P_T &= p_1 e^{(T-t)r} - \max(K_1 - S_T, 0) - p_2 e^{(T-t)r} + \max(K_2 - S_T, 0) \\
 &= \begin{cases} (p_1 - p_2)e^{(T-t)r} + K_2 - K_1 & \text{如果 } S_T < K_1 \\ (p_1 - p_2)e^{(T-t)r} + K_2 - S_T & \text{如果 } K_1 \leq S_T < K_2 \\ (p_1 - p_2)e^{(T-t)r} & \text{如果 } K_2 \leq S_T \end{cases} \quad (7.14)
 \end{aligned}$$

其中, $p_1 - p_2 < 0$ 。

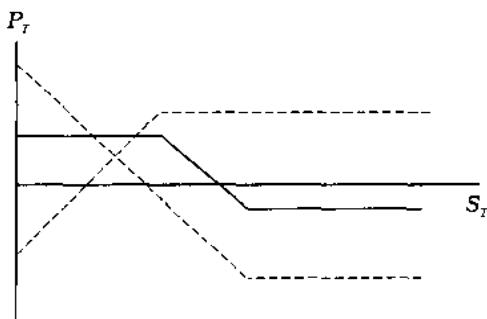


图 7.6 看跌期权构造的牛市差价期权

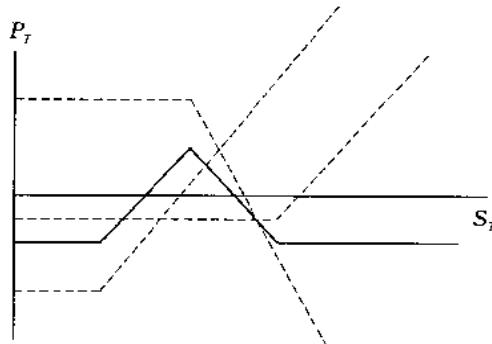
③ 蝶式差价期权。

蝶式差价期权由三个具有不同执行价的期权头寸组成。考虑如下一个交易策

略:持有一份执行价为 K_1 和一份执行价为 K_3 的看涨期权多头,同时持有两份执行价为 K_2 的看涨期权空头。其中, $K_1 < K_2 < K_3$, $K_1 + K_3 = 2K_2$ 。该策略的到期收益为:

$$\begin{aligned}
 P_T &= -c_1 e^{(T-t)r} + \max(S_T - K_1, 0) + 2c_2 e^{(T-t)r} - 2\max(S_T - K_2, 0) \\
 &\quad - c_3 e^{(T-t)r} + \max(S_T - K_3, 0) \\
 &= \begin{cases} (2c_2 - c_1 - c_3)e^{(T-t)r} & \text{如果 } S_T \leq K_1 \\ (2c_2 - c_1 - c_3)e^{(T-t)r} + S_T - K_1 & \text{如果 } K_1 < S_T \leq K_2 \\ (2c_2 - c_1 - c_3)e^{(T-t)r} + 2K_2 - S_T - K_1 & \text{如果 } K_2 < S_T \leq K_3 \\ (2c_2 - c_1 - c_3)e^{(T-t)r} & \text{如果 } K_3 < S_T \end{cases} \quad (7.15)
 \end{aligned}$$

其中, $2c_2 - c_1 - c_3 < 0$, 是构成该交易策略的初始成本,而到期时,若 $S_T = K_2$, 则可获得最大收入 $K_2 - K_1$ 。



146

图 7.7 看涨期权构造的蝶式差价期权

从该策略的到期收益图(图 7.7)中可以看到,采用该策略的结果是:当到期时股票价格在 K_2 附近时,投资者可以获利,而若到期时股票价格与 K_2 的差距较大,则投资者遭受一定的损失,但该损失是有限的。一般来说,构建蝶式差价期权时,所取的执行价 K_2 往往是接近于股票现价的,因此,当投资者预期到期时股票价格不会发生大的变化时,可采取该策略。

类似于牛市或熊市差价期权,蝶式差价期权也可用看跌期权来构建,方法如下:持有一份执行价为 K_1 和一份执行价为 K_3 的看跌期权多头,同时持有两份执行价为 K_2 的看跌期权空头。其中, $K_1 < K_2 < K_3$, $K_1 + K_3 = 2K_2$ 。该策略的到期收益为:

$$\begin{aligned}
 P_T &= -p_1 e^{(T-t)r} + \max(K_1 - S_T, 0) + 2p_2 e^{(T-t)r} - 2\max(K_2 - S_T, 0) \\
 &\quad - p_3 e^{(T-t)r} + \max(K_3 - S_T, 0)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & ((2p_2 - p_1 - p_3)e^{(T-t)r} && \text{如果 } S_T \leq K_1 \\
 & (2p_2 - p_1 - p_3)e^{(T-t)r} + S_T + K_3 - 2K_2 && \text{如果 } K_1 < S_T \leq K_2 \\
 = & \begin{cases} (2p_2 - p_1 - p_3)e^{(T-t)r} + K_3 - S_T & \text{如果 } K_2 < S_T \leq K_3 \\ (2p_2 - p_1 - p_3)e^{(T-t)r} & \text{如果 } K_3 < S_T \end{cases} && \text{如果 } K_3 < S_T
 \end{aligned} \tag{7.16}$$

其中, $2p_2 - p_1 - p_3 < 0$, 是构成该交易策略的初始成本, 而到期时, 若 $S_T = K_2$, 则可获得最大收入 $K_3 - K_2$ 。用看跌期权来构建的蝶式差价期权与用看涨期权来构建的蝶式差价期权的到期收益是相同的(见图 7.8)。

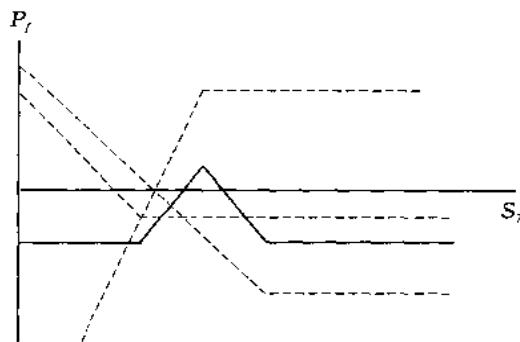


图 7.8 看跌期权构造的蝶式差价期权

如果投资者预期到期时的股价将有比较大的变动, 但不知道变动的方向时, 可以采取与上述蝶式差价期权相反的策略, 此时称为卖空一个蝶式差价期权, 即把上述蝶式差价期权看作一个组合, 并出售该组合。

由于采用蝶式差价期权策略的损失是有限的, 因此该策略可以理解为投资者对自己的预期并不十分肯定, 需要采取一定的措施将可能的损失限制在一定范围内, 否则可采取更为激进的策略, 如稍后我们要介绍的跨式期权策略。

(2) 水平差价期权。

水平差价期权(horizontal spread)指构成差价期权的各个期权头寸具有相同的执行价格, 但到期日不同, 因此也称为日历差价期权(calendar spread)。通过出售一个看涨期权同时购买一个具有相同执行价, 但是期限更长的看涨期权就可构成一个日历差价期权。由于两个期权具有不同的到期期限, 我们设这两个期权的到期时刻分别为 T 和 T' ($T < T'$), 在期权交易时刻 t , 也就是构建日历差价期权时, 两个期权的价值分别为 c_{1t} 和 c_{2t} 。在一般情况下, 期限长的期权的价值大于期限短的期权, 即 $c_{1t} < c_{2t}$ 。因此构建这样一个差价期权需要一个初始投资作为成本, 在第一个期权到期时刻 T , 两个期权的价值分别为 c_{1T} 和 c_{2T} , 其中:

$$c_{1T} = \max(S_T - K, 0)$$

假如在 T 时刻出售第二个期权进行平仓, 则它的到期收益应为:

$$-c_{2t}e^{-r(T-t)} + c_{2T}$$

考虑了成本以后,我们可以得出该日历差价期权的到期收益为:

$$\begin{aligned} P_T &= (c_{1t} - c_{2t})e^{r(T-t)} - \max(S_T - K, 0) + c_{2T} \\ &= \begin{cases} (c_{1t} - c_{2t})e^{r(T-t)} + c_{2T} & \text{如果 } S_T \leq K \\ (c_{1t} - c_{2t})e^{r(T-t)} + c_{2T} - S_T + K & \text{如果 } S_T > K \end{cases} \quad (7.17) \end{aligned}$$

由于 c_{2T} 是 S_T 的增函数,但是其随 S_T 增加的速度低于 S_T 本身增加的速度,因此当 $S_T = K$ 时, P_T 达到最大值。

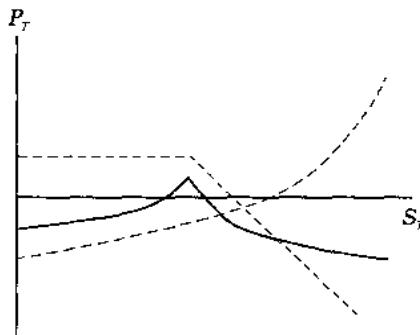


图 7.9 看涨期权构造的日历差价期权

从看涨期权构造的日历差价期权收益图(图 7.9)中可以看到,日历差价期权的到期收益与蝶式差价期权的到期收益相似,在第一个期权到期时刻 T ,如果股票价格 S_T 接近于执行价 K ,则投资者可获得正的收益,而如果这个时候股票价格与执行价之间有很大差距的话,投资者的收益就会是负的。因此,如果投资者预期股票价格不会发生大的变化的话,就可以构建一个执行价 K 接近于股票现价 S_t 的日历差价期权,该日历差价期权称为中性的日历差价期权(neutral calendar spread)。而如果投资者预期股票价格将要上涨到某一价位附近,则可以构建一个执行价 K 接近于该价位的日历差价期权,由于投资者预期股票价格将上涨,该日历差价期权就称为牛市日历差价期权(bullish calendar spread);相反,如果投资者预期股票价格将要下跌到某一价位附近,则可以构建一个执行价 K 接近于该价位的日历差价期权,由于投资者预期股票价格将下跌,该日历差价期权就称为熊市日历差价期权(bearish calendar spread)。

同样,日历差价期权既可以用看涨期权来构建,也可以用看跌期权来构建:出售一个看跌期权同时购买一个具有相同执行价,但是期限更长的看跌期权同样可以构成一个日历差价期权。其到期收益为:

$$\begin{aligned} P_T &= (p_{1t} - p_{2t})e^{r(T-t)} - \max(K - S_T, 0) + p_{2T} \\ &= \begin{cases} (p_{1t} - p_{2t})e^{r(T-t)} + p_{2T} - K + S_T & \text{如果 } S_T \leq K \\ (p_{1t} - p_{2t})e^{r(T-t)} + p_{2T} & \text{如果 } S_T > K \end{cases} \quad (7.18) \end{aligned}$$

其中, p_{2T} 是 S_T 的减函数,但是其随 S_T 的增加而减小的速度低于 S_T 本身增加的速

度,因此当 $S_T = K$ 时, P_T 达到最大值。

运用看跌期权构建的日历差价期权与用看涨期权构建的日历差价期权的到期收益状态是相似的(见图 7.10)。

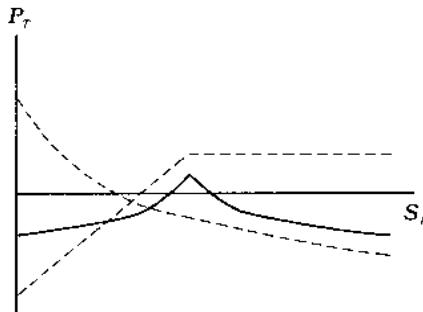


图 7.10 看跌期权构造的日历差价期权

如果投资者的预期与上述情况相反,即预计在 T 时刻股票价格在某一价位附近的可能性很小的时候,可以构建一个逆日历差价期权(reverse calendar spread),即采取与上述刚好相反的交易策略,买进期限短的期权,同时出售期限长的期权。

(3) 对角差价期权。

在垂直差价期权策略中,使用的期权具有相同的到期期限,不同的执行价;而在水平差价期权策略中,使用的期权具有相同的执行价,不同的到期期限。如果构成一个差价期权的期权具有不同的到期期限和不同的执行价,则称为对角差价期权(diagonal spread)。由于构成对角差价期权的期权可以有各种不同的到期期限和不同的执行价,对角差价期权也可分为许多不同的种类,其损益状况也比较复杂,通常可近似认为对角差价期权的损益状况随相应的垂直差价期权的损益状况的变化而变化。

7.2-4 组合期权

组合期权策略中包含同一种股票的看涨和看跌期权。下面我们介绍应用最普遍的跨式组合期权和宽跨式组合期权。

(1) 跨式期权。

所谓跨式期权(straddle)策略,就是同时买入同一种股票的具有相同到期日和相同执行价的看涨和看跌期权。根据前面的结论,跨式期权策略的到期收益为:

$$\begin{aligned} P_T &= -(c + p)e^{r(T-t)} + \max(S_T - K, 0) + \max(K - S_T, 0) \\ &= \begin{cases} (c + p)e^{r(T-t)} + K - S_T & \text{如果 } S_T \leq K \\ -(c + p)e^{r(T-t)} + S_T - K & \text{如果 } S_T > K \end{cases} \quad (7.19) \end{aligned}$$

其中, $c + p$ 是期初支付的成本,若到期时 $S_T = K$, 则没有收入,否则,股票到期价

格与执行价偏离越大，收益也就越高。一般常见的情况下，采用跨式期权策略时，执行价的选择往往接近于股票的现价。

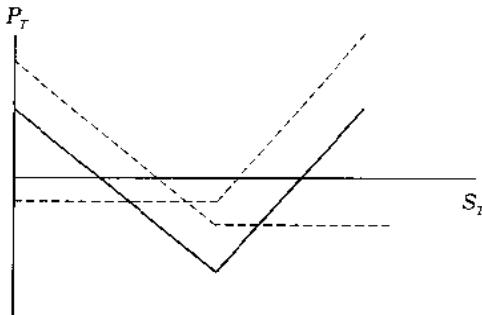


图 7.11 跨式期权的到期收益

显然，当投资者预计股票价格将发生重大变化但不知道变化的方向时，可以采用此策略。而如果投资者作相反的预期时，可以采用与上述策略相反的操作，即同时卖出同一种股票的具有相同到期日和相同执行价的看涨和看跌期权。

如果我们把跨式期权作为一个期权组合，则买入该组合可称为持有跨式期权多头(long straddle)，而卖出该组合则称为持有跨式期权空头(short straddle)。由跨式期权的到期收益图的形状，买入跨式期权有时候也称为底部跨式期权(bottom straddle)，而卖出该组合则称为顶部跨式期权(top straddle)。

(2) 宽跨式期权。

如果投资者购买的是到期日相同但执行价不同的看涨和看跌期权，则称为一个宽跨式期权(strangle)。设看涨期权的执行价为 K_1 ，看跌期权的执行价为 K_2 ，并设 $K_1 < K_2$ ，则该宽跨式期权策略的到期收益为：

$$\begin{aligned} P_T &= (c + p)e^{r(T-t)} + \max(S_T - K_1, 0) + \max(K_2 - S_T, 0) \\ &= \begin{cases} -(c + p)e^{r(T-t)} + K_2 - S_T & \text{如果 } S_T \leq K_1 \\ -(c + p)e^{r(T-t)} + K_2 - K_1 & \text{如果 } K_1 < S_T \leq K_2 \\ -(c + p)e^{r(T-t)} + S_T - K_1 & \text{如果 } K_2 < S_T \end{cases} \quad (7.20) \end{aligned}$$

其中， $c + p$ 是期初支付的成本。若到期时 $K_1 < S_T < K_2$ ，则获得固定收入，可用于弥补部分成本。若股票到期价格 S_T 比 K_1 小得越多或比 K_2 大得越多，则收益也就越高。

以上是在 $K_1 < K_2$ 的情况下讨论得到的结果，若 $K_1 > K_2$ 也可得到相似的结果。

与跨式期权策略相比，宽跨式期权策略要在股价变动比较大的情况下才能获利，但是，相比之下，它的成本也比较低，若判断失误，则蒙受的损失相对来说也比较小。两个执行价之间的距离越大，要获利所需要的股价变动也越大，同时成本也越低。

由于宽跨式期权由到期日相同但执行价不同的期权组成，并考虑到其到期收

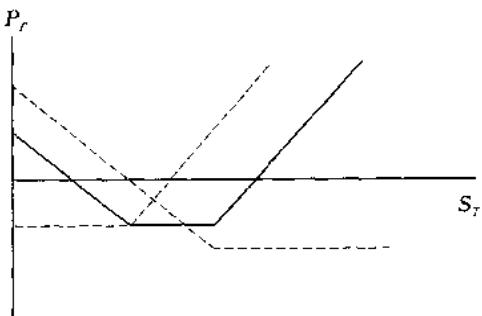


图 7.12 宽跨式期权的到期收益

益图形状,有时候该种期权也称为底部垂直价差组合(bottom vertical combination),而卖出一个宽跨式期权则称为顶部垂直价差组合(top vertical combination)。

7.3 股票期权价值的决定因素

既然期权作为一种权利,而不附带任何义务,当然它是有价值的,期权的多头方在购买期权的时候支付的期权费也就是期权的价格,实际上就是期权价值的体现。一般来说,对于一种金融商品的价值的确定,我们可以根据它将给持有者带来的现金流的现值之和来进行计算。而期权由于是一种权利,这种权利给权利拥有者带来的现金流是不确定的,甚至可能是零,因此对期权的定价要比像债券之类代表将来确定的现金流系列的证券要复杂一些。下一章我们将以股票期权为例,专门介绍期权的定价方法和模型,这里我们先讨论一下到底有哪些因素决定了股票期权的价值。

股票期权的标的资产是股票,因此股票的价格当然会影响股票期权的价值,这是第一个因素。再对照构成期权合约的几个要素,我们发现,合约规定的执行价格和到期日也是影响股票期权价值的两个重要因素。考虑合约的规模,即一份期权合约赋予其持有者购买或出售多少股股票的权利,由于对期权持有者来说,拥有购买或出售两股股票的权利与拥有购买或出售一股股票的权利相比,前者能带来的收益一定是后者带来的收益的两倍,所以说前者的价值刚好是后者的两倍。因此,我们在对期权进行定价的时候,假定每一份期权赋予其持有者购买或出售一股股票的权利,考虑实际的期权合约时,只要乘上合约的规模即可。至于看涨还是看跌,或者欧式还是美式,当然也会影响股票期权的价值,但是我们把看涨期权和看跌期权看作不同的期权,把欧式期权和美式期权也看作不同的期权,在定价时分别考虑,所以不作为影响股票期权的价值的因素。

另外,期权的到期收益取决于到期时的股票价格,从上一节的讨论中我们也看到许多期权交易策略的到期收益取决于股票价格的变化状态,因此股票价格的波

动率也是影响股票期权价值的一个重要因素。而期权有效期内预计发放的红利对到期时的股票价格有很大的影响,因此它也会影响到股票期权的价值。

最后,同对其他金融产品进行定价时一样,无风险利率也是一个不可或缺的因素。

可见,以下 6 个因素将决定股票期权的价值:

股票现价;

执行价格;

到期日;

股票价格的波动率;

无风险利率;

期权有效期内预计发放的红利。

下面我们分别讨论这 6 个因素如何影响股票期权的价值。为了考察其中每一个因素单独对期权价值的影响,在讨论某一个因素时,我们假设其他 5 个因素保持不变。

(1) 股票现价。

尽管股票期权的到期收益取决于股票的到期价格,而不是股票的现价,但股票的现价反映了众多投资者对股票将来价格的一种共同的预期。在进行期权交易时,股票未来的价格是未知的,而股票现价是可以观测的,因此在一定程度上,股票现价可作为股票到期价格的代表用于估计期权到期可能给持有者带来的收入。如果其他因素都不变的话,对看涨期权来说,股票的市场价格越高,期权可能给持有者带来的收入就越高,因此,看涨期权的价值就越高。反之,股票的市场价格越低,看涨期权的价值也就越低。而对看跌期权来说,股票的市场价格越高,期权可能给持有者带来的收入就越低,因此,看跌期权的价值就越低,反之,股票的市场价格越低,看跌期权的价值也就越高。

(2) 执行价格。

对于看涨期权来说,期权的持有者有权按照合约规定的执行价格购买股票。显然,这个约定的执行价格越低,对期权的持有者越有利,因为对同样的股票,在以同样的价格出售的情况下,能以越低的价格购买,意味着成本越低,收益就越高。因此,执行价格越低,按照执行价格购买股票的权利的价值就越高,也就是说,看涨期权的价值越高。反之,执行价格越高,看涨期权的价值就越低。而对看跌期权来说,期权的持有者拥有的权利是按照合约规定的执行价格出售股票,显然,这个约定的执行价格要越高,才对期权的持有者越有利,因为对同样的股票,可以以同样的价格购买,而以越高的价格出售,收益就越高。因此,执行价格越高,按照执行价格出售股票的权利的价值就越高,也就是说,看跌期权的价值越高。反之,执行价格越低,看跌期权的价值也就越低。

(3) 到期日。

事实上,对期权价值有影响的是期权交易时刻至到期日之间的时间长度,也就是指期权的剩余有效时间。我们考虑期权价值的时候就是期权交易时刻,该时间

区间的开始时刻是确定的,因此,该时间区间的结束时刻就决定了时间长度。所以可以说是到期日对期权价值有影响。对于美式期权来说,由于可以在剩余有效时间中的任何一天行使权利,因此,有效时间长的期权实际上包含了有效时间短的期权,所以有效时间长的期权的价值应高于有效时间短的期权。从现在起6个月有效的美式期权与现在起3个月有效的美式期权相比,如果你想要在3个月之内行使买卖标的商品的权利的话,上述两个期权都能满足你的要求,但是,如果你希望3个月之后,6个月之内行使买卖标的商品的权利的话,上述前面一个期权能满足你的要求,而后面一个期权不能满足你的要求,不管你是否已经在3个月之内行使了权利,3个月期的期权在3个月之后都会失效。可见,6个月期的美式期权比3个月期的美式期权更有价值。但是,对欧式期权来说,由于它只能在到期日那天执行,有效时间长的期权并不包含有效时间短的期权,3个月期的欧式期权只能在3个月后到期的那一天执行,而6个月期的欧式期权只能在6个月后到期的那一天执行,不能在3个月期期权到期的那一天执行。欧式期权给持有者带来的收益取决于到期日这一天股票的市场价格和执行价格之间的差,谁也不能保证6个月后的市场状况一定比3个月后的市场状况对期权持有者更有利或更不利,因此,我们不能肯定到期日对欧式期权价值的影响是正还是负。

(4) 股票价格的波动率。

股票价格的波动率反映的是股票未来价格的不确定性,一般来说,股票价格的波动率越大,未来价格的变化幅度也越大。关于价格波动率的确切定义我们将在后面给出,这里举一个非常简单的例子:甲股票和乙股票目前的价格都是10元,假设甲股票1个月后的价格可能是15元,也可能是5元,这两种可能发生的概率都是0.5;而乙股票1个月后的价格可能是12元,也可能是8元,这两种可能发生的概率也都是0.5。我们发现这两种股票的平均收益率是相同的,但它们的价格波动率不同,甲股票价格变化的幅度大,而乙股票价格变化的幅度小,我们说,甲股票价格的波动率比乙股票大。那么,股票价格的波动率对股票期权的价值有什么影响呢?由于期权具有权利与义务分离的特点,当价格变化的方向对期权持有者有利时,他可以行使他的权利获得好处,价格变化越大,获得的好处也越大;而当价格变化的方向对期权持有者不利时,他可以放弃他的权利从而避免损失,价格变化再大,也不会使他增加损失。可见,当价格变化的方向不确定时,价格变化越大,期权持有者可能获得的好处也越大,同时,可能遭受的损失却不变,因此股票价格的波动率越大,期权的价值越高。考虑两种分别以上述例子中的甲乙股票为标的资产的看涨期权,有效期均为1个月,执行价均为10元,到期时,以甲股票为标的资产的看涨期权的到期收入为5元或0元,而以乙股票为标的资产的看涨期权的到期收入为2元或0元。显然,以甲股票为标的资产的看涨期权的价值要比以乙股票为标的资产的看涨期权的价值高,其原因就在于甲股票的价格波动率比乙股票的高。

(5) 无风险利率。

无风险利率对期权价值的影响可能有两个方面:一方面,无风险利率反映整个经济增长的水平,当无风险利率增加时,所有股票价格的预期增长率也随之增加,

从而预期未来股票价格也随之增加,所以,看涨期权的预期收益可望增加,而看跌期权的预期收益会降低。可见,无风险利率增加会使看涨期权的价值上升,而使看跌期权的价值下降。另一方面,由于期权的收入要在将来才会实现,而我们考虑的是目前的期权价值,因此应考察期权所带来的未来现金流的现值。对同样的未来现金流,无风险利率越高,计算现值时采用的贴现率就越高,得出的现值也就越低。因此,从这一方面看,无论是看涨期权还是看跌期权,无风险利率的增加都会使期权的价值下降。

综合上述两个方面的影响,对看跌期权来说,无风险利率的增加会使其价值下降。而对看涨期权来说,无风险利率的增加,从预期未来股票价格的方面看,会使其价值上升,但从贴现方面看,又会使其价值下降,可以证明,前者的影响比后者大,对看涨期权来说,无风险利率的增加会使其价值上升。

(6) 期权有效期内预计发放的红利。

从某种意义上说,一份股票代表一份投资,股票的价格是这一份投资的价值的反映,而取得红利则意味着收回一部分投资。因此在红利发放的前后,一份股票所代表的投资的量是不同的,发放红利之后,一份股票所代表的投资的价值减少,因此股票价格会下降。对看涨期权来说,未来股票价格的下降,意味着预期收入的下降,可见,期权有效期内预计发放的红利越多,期权的价值越低;而对看跌期权来说,未来股票价格的下降,意味着预期收入的上升,可见,期权有效期内预计发放的红利越多,期权的价值越高。

最后,我们把上述 6 个因素对期权价值的影响作一小结如表 7.1 所示。

表 7.1 影响股票期权价格的因素

因 素	欧式看涨期权	欧式看跌期权	美式看涨期权	美式看跌期权
股票现价	+	-	+	-
执行价格	-	+	-	+
到期日	?	?	+	+
股价的波动率	+	+	+	+
无风险利率	+	-	+	-
预计发放的红利	--	+	-	+

7.4 股票期权价格特征

在利用各种方法和模型对期权进行定价之前,我们可以利用一些简单的分析方法考察一下期权的价格范围。为了简单起见,我们先假定在期权有效期内,股票没有红利支付,到本章的最后,再讨论红利的影响。由于我们要分别讨论欧式期权和美式期权的价格,在此引入符号:

c : 欧式看涨期权价格;

p : 欧式看跌期权价格;
 C : 美式看涨期权价格;
 P : 美式看跌期权价格。

7.4-1 套利定价引理

期权定价理论是基于套利的概念,而非经济学所基于的均衡概念。在经济学中,均衡价格被认为是使需求与供给相等的价格,通过经济组织的行为来解释,因此需要设定经济组织的概念、设定效用函数、设定经济组织的预期形成等。而套利理论不需要这些假定,它仅使用一个基本概念,即无风险套利机会最终将会消失。这里所说的套利机会是指无风险和无初始投资的获利机会,在资本市场,资产价格会立即调整而使得套利机会无法长时间存在。

这样的套利理论的成立需要一些基本条件:

- (1) 市场交易;
- (2) 自由进入市场;
- (3) 对资产价格的完全信息。

考虑 a 和 b 两种资产,它们可以是合成资产或金融产品,在 t 时刻,它们的价格分别表示为 A_t 和 B_t 。假设:

(1) 资产 a 和 b 在市场中交易,任何交易者可以无限制地取得在 a 和 b 上的任意多头和空头头寸,并且可以按一个固定的无风险利率进行任何数量的现金借贷。

(2) 无交易费用,包括经纪人佣金、税、保证金等。

基本引理:

(1) 如果在将来时刻 T ($T > t$), a 和 b 的价格以概率 1 满足: $A_T \geq B_T$, 则在 t 时刻的价格满足 $A_t \geq B_t$;

(2) 如果在将来时刻 T 以概率 1 满足: $A_T = B_T$, 则在 t 时刻的价格满足 $A_t = B_t$ 。

证明:

(1) 如果 $A_t < B_t$, 则在 t 时刻以 B_t 卖空 b , 以 A_t 买入 a , 并且到 T 时刻作反向操作平仓,则在 t 和 T 时刻的现金流如下:

	t 时刻	T 时刻
a	$-A_t$	A_T
b	B_t	$-B_t$
合计	$B_t - A_t > 0$	$A_T - B_t \geq 0$

发现在 t 时刻有一个正的现金流 $B_t - A_t$, 而在 T 时刻有一个非负的现金流 $A_T - B_T$, 整个过程不需要投入资本,也没有风险。换句话说,如果 $A_t < B_t$, 则存在套利机会,根据假设,这种机会必须消失,也就是说,若 $A_T \geq B_T$, 则 A_t 不可以小于 B_t , 所以,(1)成立。

(2) 同样方法可证明:若 $A_T \leq B_T$, 则 $A_t \leq B_t$, $A_T = B_T$ 表示在 T 时刻 a 和 b 的价格同时满足 $A_T \geq B_T$ 和 $A_T \leq B_T$, 因此在 t 时刻 a 和 b 的价格同时满足 $A_t \geq B_t$ 和 $A_t \leq B_t$, 即 $A_t = B_t$ 。证毕。

7.4-2 欧式股票期权价格

(1) 看涨期权。

为了得到欧式看涨期权的价值的范围, 我们考虑以下三个组合:

组合 A: 一份股票;

组合 B: 一份欧式看涨期权加上 $Ke^{-r(T-t)}$ 的现金;

组合 C: 一份股票加上 $Ke^{-r(T-t)}$ 的现金。

它们在 t 和 T 时刻的价值分别为:

	t	T
V_A	S	S_T
V_B	$c + Ke^{-r(T-t)}$	$\max(S_T - K, 0) + K$
V_C	$S + Ke^{-r(T-t)}$	$S_T + K$

显然, $V_A(T) \leq V_B(T) \leq V_C(T)$, 利用上述基本引理, 可得 $V_A(t) \leq V_B(t) \leq V_C(t)$, 即:

$$S \leq c + Ke^{-r(T-t)} \leq S + Ke^{-r(T-t)}$$

稍加整理, 并考虑到期权的价值不可能为负, 可得:

$$\max(S - Ke^{-r(T-t)}, 0) \leq c \leq S \quad (7.21)$$

这就是不付红利股票的欧式看涨期权的价值的范围。

(2) 看跌期权。

为了得到欧式看跌期权的价值的范围, 我们考虑以下三个组合:

组合 A: $Ke^{-r(T-t)}$ 的现金;

组合 B: 一份欧式看跌期权加上一份股票;

组合 C: 一份股票加上 $Ke^{-r(T-t)}$ 的现金。

它们在 t 和 T 时刻的价值分别为:

	t	T
V_A	$Ke^{-r(T-t)}$	K
V_B	$p + S$	$\max(S_T - K, 0) + S_T$
V_C	$S + Ke^{-r(T-t)}$	$S_T + K$

显然, $V_A(T) \leq V_B(T) \leq V_C(T)$, 利用上述基本引理, 可得 $V_A(t) \leq V_B(t) \leq V_C(t)$, 即:

$$Ke^{-r(T-t)} \leq p + S \leq S + Ke^{-r(T-t)}$$

稍加整理，并考虑到期权的价值不可能为负，可得：

$$\max(Ke^{-r(T-t)} - S, 0) \leq p \leq Ke^{-r(T-t)} \quad (7.22)$$

这就是不付红利股票的欧式看跌期权的价值的范围。

(3) 平价关系。

尽管看涨期权和看跌期权赋予其持有者两种不同的权利，但是如果它们的标的资产相同的话，那么，它们的价值就受同一个变量，即标的资产价格的影响。如果有两个期权，一个是看涨期权，另一个是看跌期权，它们具有同样的标的资产、同样的执行价和同样的到期日，那么它们的价格之间是否有一定的关联呢？我们考虑如下两个组合：

组合 A：一份欧式看涨期权加上 $Ke^{-r(T-t)}$ 的现金；

组合 B：一份欧式看跌期权加上一份股票。

它们在 t 和 T 时刻的价值分别为：

	t	T
V_A	$c + Ke^{-r(T-t)}$	$\max(S_t - K, 0) + K = \max(S_T, K)$
V_B	$p + S$	$\max(K - S_T, 0) + S_T = \max(K, S_T)$

显然， $V_A(T) = V_B(T)$ ，利用上述基本引理，可得 $V_A(t) = V_B(t)$ ，即：

$$c + Ke^{-r(T-t)} = p + S \quad (7.23)$$

这就是不付红利股票的欧式看涨和看跌期权的平价关系。

7.4-3 美式股票期权价格

美式期权与欧式期权的惟一差别在于它可以提前执行，而欧式期权不可以提前执行，因此美式期权的价值应大于等于欧式期权的价值：

$$C \geq c, \quad P \geq p$$

(1) 看涨期权。

对于不付红利股票的美式看涨期权，我们将说明提前执行是不明智的。考虑以下两个组合：

组合 A：一份美式看涨期权加上数额为 $Ke^{-r(T-t)}$ 的现金；

组合 B：一份股票。

设在 τ ($t < \tau < T$) 时刻可能提前执行，两个组合在不同时刻的价值分别为：

	t	τ	T
提前执行 V_A	$C + Ke^{-r(T-t)}$	$S_\tau - K + Ke^{-r(\tau-t)}$	
不提前执行 V_A	$C + Ke^{-r(T-t)}$	$C_\tau + Ke^{-r(\tau-t)}$	$\max(S_\tau - K, 0) + K$
V_B	S	S_τ	S_T

可以看出,若提前执行的话, $V_A(\tau) < V_B(\tau)$, 即组合 A 的价值小于组合 B 的价值,而不提前执行的话, $V_A(T) \geq V_B(T)$, 即组合 A 的价值大于组合 B 的价值。也就是说,对组合 A 来说,提前执行美式看涨期权会使组合的价值降低,而美式期权的持有者拥有是否要提前执行的选择权,作为一名理智的投资者,组合 A 的持有者不会干出使自己手中持有的投资组合价值降低的蠢事,因此决不会提前执行。

事实上,如果我们把购买期权看作是一种投资行为的话,提前执行就意味着投资者想提前结束投资,实现收益,而不愿意继续持有该期权。那么提前结束投资过程,实际上有两种途径,一是提前执行,收入为 $S_\tau - K$, 二是出售期权,收入为 C_τ , 根据我们前面的讨论,

$$C_\tau \geq c_\tau \geq \max(S_\tau - Ke^{-r(T-\tau)}, 0) > S_\tau - K$$

其中, c_τ 是相应欧式看涨期权的价格。可见, $C_\tau \geq S_\tau - K$, 即出售期权比提前执行能获得更高的收益,因此想要提前结束投资的投资者可以选择出售期权,而决不应该提前执行。

既然美式看涨期权决不会被提前执行,那么它同欧式看涨期权便没有任何不同了,因此它们的价值相等,价格的范围特征也相同:

$$C = c$$

$$\max(S - Ke^{-r(T-\tau)}, 0) \leq C \leq S \quad (7.24)$$

这就是不付红利股票的美式看涨期权的价值的范围。

(2) 看跌期权。

上面我们证明了对于不付红利的股票,美式看涨期权的提前执行是不明智的,因此美式看涨期权的价值与欧式看涨期权的价值相同。但是,对于美式看跌期权,我们无法证明提前执行是不明智的,事实上,在某些情况下,提前执行美式看跌期权是明智的。

例如,假设一份以 A 股票为标的的美式看跌期权,执行价为 20 元/股,当年 6 月 15 日到期。考虑一种极端情况,如果在 3 月 15 日,A 股票的价格跌至 0.01 元/股,此时提前执行,可获得 19.99 元/股,而如果不提前执行,等到 6 月 15 日到期,即使到时候 A 股票变得一文不值(价格为 0.00 元/股),也只能得到 20.00 元/股。考虑到现金的时间价值,即使是按照 1% 的年利率计算,3 月 15 日的 19.99 元也比 6 月 15 日的 20.00 元更有价值一些。

可见,如果标的股票的价格已经很低时,提前执行美式看跌期权不但可以确保收益,而且可以提前获得现金收入,即使股票价格不再上升,提前执行仍然比到期执行更有利。

由于美式看跌期权可以提前执行,提前执行获得的收入为 $K - S$, 如果期权价低于 $K - S$ 的话,就会有套利机会,套利者大量买入该美式看跌期权,然后立即执行,可以无风险地套取大量收益,由于套利者的存在,期权价低于 $K - S$ 的情况无法长期存在,当市场均衡时,期权价必然会大于或等于 $K - S$: $P \geq K - S$, 当期权

应该被提前执行时, $P = K - S$ 。

另外, 投资者执行看跌期权时, 所能获得的收入最多为 K , 因此不可能有人愿意以高于 K 的价格购买看跌期权, 即 $P \leq K$ 。

综上, 并考虑到期权的价值不可能为负, 对不付红利的股票, 美式看跌期权价值的范围为:

$$\max(K - S, 0) \leq P \leq K \quad (7.25)$$

(3) 平价关系。

利用欧式看涨和看跌期权的平价关系:

$$c + Ke^{-r(T-t)} = p + S$$

并考虑到, 对不付红利的股票, $C = c$, $P > p$, 代入上式, 可得:

$$C - P < S - Ke^{-r(T-t)} \quad (7.26)$$

另外, 再考虑以下两个组合:

组合 A: 一份美式看涨期权加上数额为 K 的现金;

组合 B: 一份美式看跌期权加上一份股票。

前面我们已证明美式看涨期权不可能被提前执行, 设在 τ ($t < \tau < T$) 时刻看跌期权可能被提前执行, 两个组合在不同时刻的价值分别为:

	t	τ	T
V_A	$C + K$	$C_\tau + Ke^{r(\tau-t)}$	$\max(S_\tau - K, 0) + Ke^{r(T-t)}$
提前执行 V_B	$P + S$	K	
不提前执行 V_B	$P + S$		$\max(K - S_\tau, 0) + S_T$

可见, 如果提前执行, 则 $V_A(\tau) > V_B(\tau)$, 而不提前执行的话, $V_A(T) > V_B(T)$, 即组合 A 的价值总是大于组合 B 的价值, 可得: $V_A(t) > V_B(t)$, 即:

$$C + K > P + S$$

或

$$C - P > S - K$$

综上, 对不付红利的股票, 美式看涨和看跌期权价格的关系为:

$$S - K < C - P \leq S - Ke^{-r(T-t)} \quad (7.27)$$

7.4-4 红利的影响

由于通常场内交易的股票期权的期限小于 8 个月, 在期权有效期内的红利通常能被准确地预计。下面我们考虑在期权有效期内有红利发放的股票的期权的价格特征, 在此引入记号 D , 表示期权有效期内发放的红利的现值。

(1) 欧式看涨期权。

考虑以下三个组合:

组合 A:一份股票;

组合 B:一份欧式看涨期权加上 $D + Ke^{-r(T-t)}$ 的现金;

组合 C:一份股票加上 $Ke^{-r(T-t)}$ 的现金。

它们在 t 和 T 时刻的价值分别为:

	t	T
V_A	S	$S_T + De^{r(T-t)}$
V_B	$c + D + Ke^{-r(T-t)}$	$\max(S_T - K, 0) + De^{r(T-t)} + K$
V_C	$S + Ke^{-r(T-t)}$	$S_T + De^{r(T-t)} + K$

显然, $V_A(T) \leq V_B(T) \leq V_C(T)$, 利用前述基本引理, 可得 $V_A(t) \leq V_B(t) \leq V_C(t)$, 即:

$$S \leq c + D + Ke^{-r(T-t)} \leq S + Ke^{-r(T-t)}$$

稍加整理, 并考虑到期权的价值不可能为负, 可得:

$$\max(S - D - Ke^{-r(T-t)}, 0) \leq c \leq S - D \quad (7.28)$$

这就是有红利支付的股票的欧式看涨期权的价值的范围。

(2) 欧式看跌期权。

考虑以下三个组合:

组合 A: $D + Ke^{-r(T-t)}$ 的现金;

组合 B:一份欧式看跌期权加上一份股票;

组合 C:一份股票加上 $Ke^{-r(T-t)}$ 的现金。

它们在 t 和 T 时刻的价值分别为:

	t	T
V_A	$D + Ke^{-r(T-t)}$	$De^{r(T-t)} + K$
V_B	$p + S$	$\max(S_T - K, 0) + De^{r(T-t)} + S_T$
V_C	$S + Ke^{-r(T-t)}$	$S_T + De^{r(T-t)} + K$

显然, $V_A(T) \leq V_B(T) \leq V_C(T)$, 利用前述基本引理, 可得 $V_A(t) \leq V_B(t) \leq V_C(t)$, 即:

$$D + Ke^{-r(T-t)} \leq p + S \leq S + Ke^{-r(T-t)}$$

稍加整理, 并考虑到期权的价值不可能为负, 可得:

$$\max(Ke^{-r(T-t)} + D - S, 0) \leq p \leq Ke^{-r(T-t)} \quad (7.29)$$

这就是有红利支付的股票的欧式看跌期权的价值的范围。

(3) 欧式平价关系。

考虑如下两个组合:

组合 A:一份欧式看涨期权加上 $D + Ke^{-r(T-t)}$ 的现金;

组合 B: 一份欧式看跌期权加上一份股票。

它们在 t 和 T 时刻的价值分别为:

	t	T
V_A	$c + D + Ke^{-r(T-t)}$	$\max(S_T - K, 0) + De^{r(t-T)} + K$
V_B	$p + S$	$\max(K - S_T, 0) - De^{r(t-T)} + S_T$

显然, $V_A(T) = V_B(T)$, 利用前述基本引理, 可得 $V_A(t) = V_B(t)$, 即:

$$c + D + Ke^{-r(T-t)} = p + S \quad (7.30)$$

这就是有红利支付的股票的欧式看涨和看跌期权的平价关系。

(4) 美式看涨期权。

与不付红利股票的美式看涨期权不同, 对于有红利支付的股票, 美式看涨期权的提前执行有时候可能是明智的。在红利支付之前提前执行美式看涨期权, 可以获得红利收入; 而且红利的发放会引起股价跳跃性下降, 导致看涨期权的获利能力下降。因此, 在红利发放之前提前执行美式看涨期权往往是明智的。

由于美式看涨期权可以提前执行, 提前执行获利为 $S - K$, 当市场均衡时, 期权的价格必然会大于或等于 $S - K$: $C \geq S - K$ 。另外, 一个看涨期权的价值无论如何不会比股票本身的价值更高, 因此, $C \leq S$ 。

综上, 并考虑到期权的价值不可能为负, 对有红利支付的股票, 美式看涨期权价值的范围为:

$$\max(S - K, 0) \leq C \leq S \quad (7.31)$$

(5) 美式看跌期权。

对于有红利支付的股票, 由于红利的发放会引起股价跳跃性下降, 导致看跌期权的获利能力增加, 而且, 如果是用手中持有的股票去交割的话, 在红利发放之后再执行期权, 还可以获取股利, 因此, 美式看跌期权的提前执行往往应该发生在红利发放之后。

但是, 不管有红利支付股票的美式看跌期权应在何时提前执行, 由于它可以提前执行, 通过同样的分析, 我们得出与不付红利股票情况下美式看跌期权价值范围相同的结果, 对有红利支付的股票, 美式看跌期权价值的范围同样是:

$$\max(K - S, 0) \leq P \leq K \quad (7.32)$$

(6) 美式平价关系。

对于不付红利的股票期权, 我们有:

$$C - P \leq S - Ke^{-r(T-t)}$$

由于红利的发放将使看涨期权的价值下降, 而使看跌期权的价值上升, 因此, 对有红利发放的股票, 上式仍成立。

另外, 再考虑以下两个组合:

组合 A: 一份欧式看涨期权加上数额为 $D + K$ 的现金;

组合 B: 一份美式看跌期权加上一份股票。

设在股利发放后某一时刻 τ ($t < \tau < T$), 看跌期权可能提前执行, 两个组合在不同时刻的价值分别为:

	t	τ	T
V_A	$c + D + K$	$c_\tau + (D + K)e^{r(\tau-t)}$	$\max(S_T - K, 0) + (D + K)e^{r(T-t)}$
提前执行 V_B	$P + S$	$K + De^{r(\tau-t)}$	
不提前执行 V_B	$P + S$		$\max(K - S_\tau, 0) + S_\tau + De^{r(\tau-t)}$

注: 如果看跌期权在股利发放前被提前执行, 则 $V_B(\tau) = K < K + De^{r(\tau-t)}$ 。

可见, 如果提前执行, 则 $V_A(\tau) > V_B(\tau)$, 而不提前执行的话, $V_A(T) > V_B(T)$, 即组合 A 的价值总是大于组合 B 的价值, 可得: $V_A(t) > V_B(t)$, 即:

$$c + D + K > P + S$$

或

$$c - P > S - D - K$$

由于 $C \geq c$, 可得:

$$C - P > S - D - K$$

综上, 对有红利支付的股票, 美式看涨和看跌期权价格的关系为:

$$S - D - K < C - P \leq S - Ke^{-r(T-t)} \quad (7.33)$$

7.4-5 小结

最后, 我们以表格形式将本章所讨论的股票期权价格特征作一小结, 见表 7.2。

表 7.2 股票期权价格特征

	欧 式	美 式
不付红利的股票	看涨期权价格范围 $\max(S - Ke^{-r(T-t)}, 0) \leq c \leq S$	$\max(S - Ke^{-r(T-t)}, 0) \leq C \leq S$
	看跌期权价格范围 $\max(Ke^{-r(T-t)} - S, 0) \leq p \leq Ke^{-r(T-t)}$	$\max(K - S, 0) \leq P \leq K$
	平价关系 $c + Ke^{-r(T-t)} = p + S$	$S - K < C - P \leq S - Ke^{-r(T-t)}$
	看涨期权价格范围 $\max(S - D - Ke^{-r(T-t)}, 0) \leq c \leq S - D$	$\max(S - K, 0) \leq C \leq S$
	看跌期权价格范围 $\max(Ke^{-r(T-t)} + D - S, 0) \leq p \leq Ke^{-r(T-t)}$	$\max(K - S, 0) \leq P \leq K$
	平价关系 $c + D + Ke^{-r(T-t)} = p + S$	$S - D - K < C - P \leq S - Ke^{-r(T-t)}$

本章小结

股票期权是一种合约，合约双方就将来买卖一定数量的某种股票达成一项“不平等”协议，合约的一方（期权的买方）拥有按事先确定的价格向对方购买股票或将股票卖给对方的权利，而合约的另一方（期权的卖方）则承担成为交易对方的义务。由于双方权利义务的不对称，期权的买方必须向卖方支付一定的期权费作为获得这一权利的代价，而卖方则因承担责任而得到期权费作为报酬。

按照构成期权合约的要素，期权可以分为不同的种类：看涨期权指期权持有者可以按事先确定的价格购买股票，而看跌期权指期权持有者可以按事先确定的价格出售股票。欧式期权指期权持有者只能在到期日那一天行使权利，而美式期权指期权持有者可以在到期日之前行使权利。

在期权交易所内交易的期权是标准化的，期权合约的具体条款由交易所统一制订，并且交易所还负责规范交易过程，通过保证金的形式确保期权的卖方能够按合约的规定履行义务。而不通过交易所，由买卖双方直接进行交易的期权则称为场外交易(OTC)的期权，场外交易的期权的特点是非标准化，非标准化的好处是灵活，交易双方可以根据特定需要来设定期权合约的具体条款，缺点是流动性差，当合约一方希望退出时很难找到另一方来接替自己在合约之中的位置。此外，场外交易的期权由于缺少了交易所提供的保障机制，因而可能存在违约风险。

股票期权的到期收益与到期时标的股票的市场价格有关，由于针对同一标的股票有各种不同的期权，通过将这些期权以及标的股票本身进行组合的交易策略，可以得到各种不同形状的到期收益图（组合的到期收益与到期时标的股票市场价格的关系图）。如果一种交易策略是单纯由看涨期权头寸或单纯由看跌期权头寸构成的，则称为差价期权；而如果一种交易策略中既包含看涨期权，又包含看跌期权，则称为组合期权。

有以下6个因素对股票期权价格的确定有影响：股票现价、执行价格、到期日、股票价格的波动率、无风险利率、期权有效期内预计发放的红利。这些因素对看涨期权或看跌期权、美式期权或欧式期权的价格有不同的影响。

在建立模型对期权进行定价之前，我们可以利用套利定价的原理考察期权价格的一些特征，包括期权价格的上下限、看涨期权和看跌期权价格之间的平价关系等。

复习与思考

- 利用欧式期权的平价关系，证明：在其他条件都相等的情况下，用看涨期权和用看跌期权构造的蝶式差价期权的成本相等。
- 设一宽跨式期权由一个执行价为 K_1 的看跌期权和一个到期日相同，执行价为 K_2 的看涨期权构成， $K_1 < K_2$ ，试画出其到期收益图。

3. 试比较看涨期权空头和看跌期权多头两种头寸。
4. 为什么美式期权比相应的欧式期权更有价值？
5. 一个组合由一份看涨期权多头和一份看跌期权空头组成，两份期权的标的资产、执行价、到期日均相同，试画出其到期收益图。
6. 考虑一不付红利股票的欧式看涨期权，股票现价 28 元，执行价 26 元，剩余有效期 3 个月，无风险利率 5%，求该期权价格的范围。
7. 已知某股票现价 50 元，以该股票为标的，有效期为 1 个月，执行价为 55 元的欧式看跌期权的市场价格为 4.75 元，无风险利率为 6%。请问有没有套利机会？若有，如何套利？
8. 若上题中是美式期权，情况又如何？
9. 已知某股票现价 29 元，该股票在 2 个月和 5 个月后各有一次 0.5 元的红利支付，同时已知以该股票为标的，有效期为 6 个月，执行价为 30 元的欧式看涨期权价为 2 元，当前无风险利率为 6%，问相应的欧式看跌期权的价格应为多少？
10. 已知执行价为 50 元和 60 元的欧式看跌期权价分别为 5 元和 12 元。请问如何用这两个期权建立牛市差价期权和熊市差价期权？试画出到期收益图。

参考文献

- Fred D. Arditti, 1996, *Derivatives*, Harvard Business School Press.
- Hans R. Stoll and Robert E. Whaley, 1993, *Futures and Options*, South-Western Publishing Co..
- John C. Hull, 2001a,《期权、期货和其他衍生品》(第 4 版,英文影印版),清华大学出版社。
- John C. Hull, 2001b,《期货与期权市场基本原理》(第 4 版,英文影印版),清华大学出版社。
- John C. Cox and Mark Rubinstein, 2001,《期权市场》(第 3 版,英文影印版),清华大学出版社。
- 宋逢明,1999,《金融工程原理——无套利均衡分析》,清华大学出版社。

股票期权的定价模型

本章我们讨论股票期权的定价问题。由于与美式期权相比,欧式期权只能在到期日执行,相对来说具有比较高的确定性,我们先考虑欧式期权的定价模型。同时,对欧式期权而言,由于有看涨和看跌期权的平价关系,确定了看涨期权的价格就可以确定看跌期权的价格,所以我们只需要先考虑欧式看涨期权即可。另外为了简单起见,我们假设在期权有效期内,其标的股票没有红利支付,得出定价公式以后,再考虑红利的影响,对公式进行修正。因此,本章将主要讨论基于不付红利股票的欧式看涨期权的定价模型。

8.1 股票价格的二叉树模型

我们知道,决定股票期权到期价值的是执行价与到期时标的股票价格之差,而在决定期权价格的时候,只知道执行价而不知道未来(期权到期时)股票价格,因此任何期权定价模型都必须对未来股票价格有一个比较合理的假设。由于不确定性,往往只能假设未来股票价格服从某种分布。

8.1-1 二项式分布

假设在一个不透明的袋子中有 N 个球,其中 M 个是白色的,剩下的是黑色的,所有的球除颜色之外,没有任何不同之处。现在你伸手到袋中随意取出一球,显然取到白球的概率为 M/N ,取到黑球的概率为 $1 - M/N$ 。像这种只有两个可能结果的试验称为贝努里试验。若只进行一次贝努里试验,则要么取到白球,要么取到黑球,两种可能情况有确定的概率出现,这称为贝努里分布。

在上述例子中,若连续取球 n 次,并且每次取出后又将球放回袋中,则每一次取到白球的概率均为 M/N ,而取到黑球的概率也都为 $1 - M/N$ 。像这种重复进行 n 次独立的贝努里试验,称为 n 重贝努里试验。这里的重复是指在每一次试验中,取到白球和取到黑球的概率都保持不变,而独立是指每一次试验的结果与其他任何一次试验的结果没有任何关联。像这样一次 n 重贝努里试验得到的一个形为{黑、白、白、黑、白……}的序列称为贝努里序列。

下面我们来考察在上述的 n 重贝努里试验中, 刚好取到 k 次白球的概率。令 $p = M/N$ 为在一次贝努里试验中取到白球的概率, 当然取到黑球的概率为 $1 - p$, 在 n 重贝努里试验中, 刚好取到 k 次白球的概率记为 $b(k; n, p)$ 。为了计算 $b(k; n, p)$, 我们先来考察满足这一条件(即刚好取到 k 次白球)的序列, 我们发现在所有满足上述条件的序列中, 必然出现 k 次白球和 $n - k$ 次黑球, 由于在这个 n 重贝努里试验中, 每一次取球得到的结果是独立的, 因此不管出现白和黑的次序如何, 每一个满足条件的序列出现的概率均为 $p^k(1-p)^{n-k}$ 。可见, $b(k; n, p)$ 等于满足条件的序列数乘以任何一个满足条件的序列出现的概率。那么满足条件的序列数到底是多少呢? 这实际上是一个从 n 个元素中取出 k 个元素的组合问题, 该组合数等于:

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

因此可得:

$$b(k; n, p) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (8.1)$$

这就是在上述的 n 重贝努里试验中, 刚好取到 k 次白球的概率。

如果设 x 是一个随机变量, 它的取值为在一次 n 重贝努里试验中取白球的次数, 那么 $b(k; n, p)$ 就是 x 取值为 k 的概率, 其中 $k = 0, 1, 2, \dots, n$ 。可见 $b(k; n, p)$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$, 就是随机变量 x 的概率分布函数。由于 $b(k; n, p)$ 刚好是二项式 $[ps + (1-p)]^n$ 展开式中 s^k 项的系数, 因此上述分布称为二项式分布, 也就是说, 随机变量 x 服从二项式分布。注意:

$$\sum_{k=0}^n b(k; n, p) = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = [p + (1-p)]^n = 1 \quad (8.2)$$

另外, 二项式分布的计算比较麻烦, 当 $np(1-p)$ 比较大时(例如 $0.2 < p < 0.8, np(1-p) > 10$), 可用正态逼近:

$$\sum_{i=0}^k b(i; n, p) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}} e^{-x^2/2} = N\left(\frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \quad (8.3)$$

其中 $N(\cdot)$ 为标准正态分布函数。当 p 较小而 np 不大时(例如 $p < 0.1, np \approx 1$), 可用泊松逼近:

$$b(k; n, p) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (8.4)$$

其中, $\lambda = np$ 。

8.1-2 股价模型

对于股票价格, 设它当前价格为 S , 对其一段时间以后的未来价格的一个最简

单的假设是设它未来价格有两种可能,一是为 S_u ,概率为 p ,另一种可能为 S_d ,概率为 $1-p$,见图 8.1。

这就是一个关于股价的单期二叉树模型。当时间间隔比较小的时候,这个模型对于股票价格变化的描述具有一定的合理性。此模型中含有三个参数: u , d 和 p ,一般来说,我们可以设定股票价格在一个周期(即上述时间间隔,设为 Δt)内的预期收益率为 $\mu \Delta t$,其方差为 $\sigma^2 \Delta t$,则 u , d 和 p 之间就必须满足某种关系,一种选择是令:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = 1/u, \quad p = \frac{e^{\mu\Delta t} - d}{u - d} \quad (8.5)$$

这样取的 u , d 和 p 可满足上述对预期收益率及方差的要求。注意,因 u , d 和 p 为三个参数,它们只需要满足预期收益率和方差两个约束条件,因此上述对三个参数取值的选择不是惟一的,可以有其他的选择方案。

如果我们考虑的时间间隔比较长的话,我们可以将上述单期的二叉树扩展为多期的二叉树模型,即股价在一个小的时间间隔后从 S 变化为 S_u 或 S_d ,在此基础上,再经过一个小的时间间隔,进一步变化为 S_{u^2} 、 S_{ud} 或 S_{d^2} ,依此类推,见图 8.2。

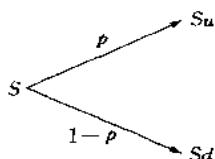


图 8.1 股价的单期二叉树模型

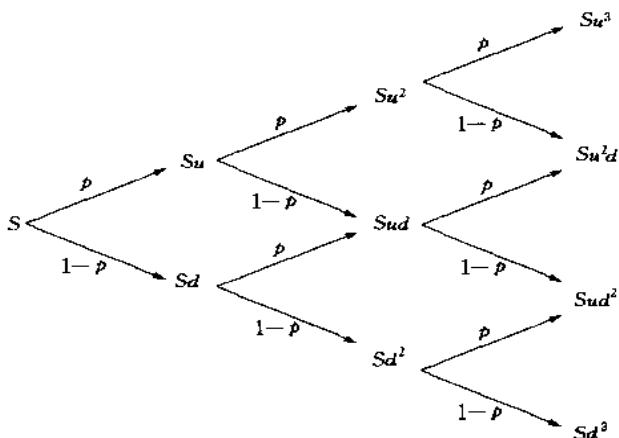


图 8.2 股价的多期二叉树模型

这是一个三期的二叉树模型,每一期股票价格以 p 的概率上升,以 $1-p$ 的概率下降(设 $u > 1$, $d < 1$)。对图 8.2 进行分析可知,股价从期初到期末走过的路径有如表 8.1 所示的 8 种可能。

可见,股票价格最终为 S_{u^3} 的概率为 p^3 ,最终为 S_{u^2d} 的概率为 $3p^2(1-p)$,最终为 S_{ud^2} 的概率为 $3p(1-p)^2$,最终为 S_{d^3} 的概率为 $(1-p)^3$ 。

对于 n 期的二叉树模型,我们发现,如果把期末的股票价格 S_T 看作是一个随机变量的话,它服从一个二项式分布, S_T 取值为 $S_{u^k d^{n-k}}$ 的概率为:

表 8.1 股价路径

路 径	结 果	概 率
$S \rightarrow Su \rightarrow Su^2 \rightarrow Su^3$	Su^3	$p \times p \times p = p^3$
$S \rightarrow Su \rightarrow Su^2 \rightarrow Su^2d$	Su^2d	$p \times p \times (1-p) = p^2(1-p)$
$S \rightarrow Su \rightarrow Sud \rightarrow Su^2d$	Su^2d	$p \times (1-p) \times p = p^2(1-p)$
$S \rightarrow Su \rightarrow Sud \rightarrow Sud^2$	Sud^2	$p \times (1-p) \times (1-p) = p(1-p)^2$
$S \rightarrow Sd \rightarrow Sud \rightarrow Su^2d$	Su^2d	$(1-p) \times p \times p = p^2(1-p)$
$S \rightarrow Sd \rightarrow Sud \rightarrow Sud^2$	Sud^2	$(1-p) \times p \times (1-p) = p(1-p)^2$
$S \rightarrow Sd \rightarrow Sd^2 \rightarrow Sud^2$	Sud^2	$(1-p) \times (1-p) \times p = p(1-p)^2$
$S \rightarrow Sd \rightarrow Sd^2 \rightarrow Sd^3$	Sd^3	$(1-p) \times (1-p) \times (1-p) = (1-p)^3$

$$b(k; n, p) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad k=0, 1, 2, \dots, n$$

利用二叉树模型, 我们得到了未来股票价格的概率分布, 下面我们将在此基础上讨论股票期权价格的确定。

8.2 二叉树模型期权定价方法

8.2-1 单期二叉树模型

我们首先在一个最简单的假设下考虑期权的定价问题, 即股票价格服从一个单期的二叉树模型。考虑一个执行价格为 K 的欧式看涨期权, 设在期权交易时即 t 时刻, 其标的股票价格为 S 。根据二叉树模型的假定, 在期权到期时, 股票价格 S_T 只可能是 Su 或 Sd , 可见到期时期权价值可能为 $\max(Su - K, 0)$ 或 $\max(Sd - K, 0)$, 我们分别记为 $c_T(u)$ 和 $c_T(d)$ 。现在我们构造这样一个组合, 它由一份看涨期权和 α 份标的股票组成, 在 t 时刻, 该组合的价值记为:

$$V_t = \alpha S + c$$

其中, c 是期初看涨期权的价格, 也就是我们想要知道的东西。然后我们再看该组合在期权到期时, 即 T 时刻的价值 V_T , 如果到期时股票价格为 Su , 则

$$V_T = V_T(u) = \alpha Su + c_T(u) = \alpha Su + \max(Su - K, 0)$$

若到期时股票价格为 Sd , 则

$$V_T = V_T(d) = \alpha Sd + c_T(d) = \alpha Sd + \max(Sd - K, 0)$$

其中, S 和 K 为已知, u 和 d 由股票价格的二叉树模型设定, α 在构造组合的时候由人确定。如果我们在构造组合的时候, 选取这样一个 α , 使得 $V_T(u) = V_T(d)$, 就可以完全确定组合在 T 时刻的价值, 可见这样得到的一个组合是一个无风险组合。

下面我们来看, α 应如何选择才能使组合为无风险, 令:

$$V_T(u) = V_T(d)$$

即

$$\alpha Su + \max(Su - K, 0) = \alpha Sd + \max(Sd - K, 0) \quad (8.6)$$

可解得：

$$\alpha = \frac{\max(Sd - K, 0) - \max(Su - K, 0)}{Su - Sd} \quad (8.7)$$

设 $u > d$, 则 $\max(Sd - K, 0) - \max(Su - K, 0) < 0$, $Su - Sd > 0$, 可见 $\alpha < 0$, 表示应卖空股票^①。

确定了 α 以后, 我们就得到在 T 时刻组合的价值为:

$$V_T = \frac{Su \max(Sd - K, 0) - Sd \max(Su - K, 0)}{Su - Sd} \quad (8.8)$$

由于该组合是一个无风险组合, 因此在 t 到 T 期间, 它的收益应为无风险收益, 即:

$$V_t = \alpha S + c = e^{-r(T-t)} V_T \quad (8.9)$$

其中, r 为无风险利率。解以上方程, 我们可以得到:

$$\begin{aligned} c &= e^{-r(T-t)} V_T - \alpha S \\ &= \frac{(e^{-r(T-t)} Su - S) \max(Sd - K, 0) - (e^{-r(T-t)} Sd - S) \max(Su - K, 0)}{Su - Sd} \end{aligned} \quad (8.10)$$

即为该看涨期权在 t 时刻的价格。

注意, 在以上对期权定价的过程中, 我们可以任意设定二叉树模型中的参数 u 和 d , 而没有用到另一个参数 p 。事实上, 当我们设定了 u 和 d 以后^②, 如果我们股票价格的变化满足期望收益率为 μ 的条件的话, 实际上 p 就确定了, 由

$$Sup + Sd(1-p) = Se^{r(T-t)}$$

得:

$$p = (e^{r(T-t)} - d)/(u - d)$$

在上述期权价格计算公式中没有 p 的出现, 实际上意味着期权价格独立于股票的预期收益率。

尽管在我们对 u 和 d 的任意设定下, 股票收益率的方差会有很大变化, 而一般我们用方差代表风险, 对风险不同的资产, 投资者要求的回报率也不同, 计算现值时应该采用不同的贴现率; 但幸运的是, 在这里, 我们可以设法把股票和期权头寸组合起来, 构造成一个无风险组合, 对整个组合的价值用无风险利率进行贴现, 而

^① 若 $\max(Sd - K, 0) - \max(Su - K, 0) = 0$, 则表示 $Sd < Su < K$, 到期时股票价格不可能高于执行价, 该看涨期权价值为零。

^② u 和 d 必须满足 $d \leq e^{r(T-t)} \leq u$ 的条件, 其中, r 为无风险利率, 否则有套利机会。

不用管股票本身或者股票期权的风险到底有多大。

例 8.1 设 A 股票现价 50 元,一个月后的股价可能是 60 元或 45 元,当前无风险利率为 12%,求以 A 股票为标的资产,执行价为 50 元,一个月后到期的欧式看涨期权的价格。

根据题意, $S = 50$, $S_u = 60$, $S_d = 45$, $r = 0.12$, $T - t = 1/12$, $K = 50$ 。

解法一:直接代入公式(8.10),得:

$$c = \frac{(e^{-r(T-t)}S_u - S)\max(S_d - K, 0) - (e^{-r(T-t)}S_d - S)\max(S_u - K, 0)}{S_u - S_d}$$
$$= \frac{(e^{-0.01} \times 60 - 50) \times 0 - (e^{-0.01} \times 45 - 50) \times 10}{60 - 45} = 3.6318$$

解法二:根据上述思路构造组合:

考虑由一份看涨期权和 α 份标的股票组成的组合。 $V_t = \alpha S + c$, 若到期时股价为 60, 则组合价值为 $V_T(u) = 60\alpha + 10$, 若到期时股价为 45, 则组合价值为 $V_T(d) = 45\alpha$, 令 $V_T(u) = V_T(d)$, 即:

$$60\alpha + 10 = 45\alpha$$

得: $\alpha = -2/3$, $V_T = V_T(u) = V_T(d) = -30$, 再由:

$$V_t = \alpha S + c = e^{-r(T-t)}V_T$$

即

$$-\frac{2}{3} \times 50 + c = e^{-0.01} \times (-30)$$

得:

$$c = 3.6318$$

两种解法得出的结果完全一样,解法一直接代公式,方便简洁,解法二通过一步一步推导得出结果,不用死记公式,不易出错。

8.2-2 风险中性假设

由上面的讨论,我们看到,可以利用股票和股票期权头寸构造一个无风险组合,该组合的期望收益率为无风险利率,具体可表示为:

$$V_t = \alpha S + c = e^{-r(T-t)}V_T$$

其中,组合的到期价值可表示为期望值的形式^①:

$$V_T = E(V_T) = E(\alpha S_T + c_T) = \alpha E(S_T) + E(c_T)$$

因此,可以得到:

^① 当取合适的 α 时,组合的到期价值是确定的,其期望值等于实现的值。

$$aS + c = e^{-r(T-t)} a E(S_T) + e^{-r(T-t)} E(c_T) \quad (8.11)$$

从(8.11)式我们似乎可以得出这样的结论：当股票价格的期望收益率为无风险利率时，即当 $E(S_T) = Se^{r(T-t)}$ 时，期权价值可由期权到期价值的期望值按无风险利率贴现得到，即： $c = e^{-r(T-t)} E(c_T)$ 。

然而，在现实世界中，股票是一种风险资产，它的期望收益率一般不同于无风险利率，因此期权的价值也不能通过无风险利率贴现得到。尽管如此，我们仍然可以设想一个虚拟的世界，即所谓风险中性的世界。在风险中性的世界中，所有的投资者既不是风险厌恶的，也不是风险喜好的，对他们来说，投资有风险资产和投资无风险资产是无所谓的，他们只考虑预期收益率。因此，在风险中性的世界中，所有资产的期望收益率与无风险资产的期望收益率，即无风险利率相同。我们发现，如果我们在风险中性世界中来进行讨论的话，期权的定价问题就会显得比较简单：只要把期权到期价值的期望值按无风险利率贴现即可得到。而且，在风险中性世界中得到的期权价格与现实世界中的期权价格是相同的。实际上，我们在前面已经提到，期权价格独立于股票的预期收益率，究其原因，是因为期权可以与股票本身构成无风险组合，因此期权交易者可以不用单独考虑股票本身或期权本身的风险。

事实上，根据二叉树模型的假设，股票到期价值和股票期权到期价值的期望值分别为：

$$E(S_T) = Su + Sd(1-p)$$

$$E(c_T) = \max(Su - K, 0)p + \max(Sd - K, 0)(1-p)$$

它们与 p 有关，因而也跟股票的期望收益率有关。

若是在现实世界中，设股票价格期望收益率为 μ 的话，则：

$$p = (e^{\mu(T-t)} - d)/(u - d)$$

若是在风险中性的世界中，股票价格期望收益率为无风险利率 r ，则：

$$p = (e^{r(T-t)} - d)/(u - d)$$

在风险中性的世界中：

$$\begin{aligned} E(c_T) &= \max(Su - K, 0) \frac{e^{r(T-t)} - d}{u - d} + \max(Sd - K, 0) \left(1 - \frac{e^{r(T-t)} - d}{u - d}\right) \\ &= \frac{\max(Su - K, 0)(e^{r(T-t)} - d) - \max(Sd - K, 0)(e^{r(T-t)} - u)}{u - d} \end{aligned} \quad (8.12)$$

$$\begin{aligned} c &= e^{-r(T-t)} E(c_T) \\ &= \frac{\max(Su - K, 0)(1 - e^{-r(T-t)}d) - \max(Sd - K, 0)(1 - e^{-r(T-t)}u)}{u - d} \\ &= \frac{(e^{-r(T-t)}u - 1)\max(Sd - K, 0) - (e^{-r(T-t)}d - 1)\max(Su - K, 0)}{u - d} \end{aligned} \quad (8.13)$$

(8.13)式与前面利用构造无风险组合的方法得到的欧式看涨期权定价公式(8.10)完全一致。可见,我们可以假设存在一个风险中性的世界,然后在风险中性的世界中对期权进行定价,由此得到的期权价格可以适用于现实世界。

风险中性假设实际上是金融学理论中一个非常重要的概念。在传统的理论中,理性的投资者都是厌恶风险的,他们对承担任何风险都要求能获得补偿,即所谓的风险溢价,对风险厌恶程度越高,要求的补偿也越高。而我们的期权定价,是以无套利均衡分析为基础的,当市场上出现无风险套利机会的时候,所有发现该机会的投资者,不管他对风险厌恶的程度如何,都会积极地参与到套利活动中去。可见,无套利均衡分析的过程和结果与市场参与者的风险偏好无关。

所谓的风险中性假设就是指:

如果对一个问题的分析过程与投资者的风险偏好无关,则可以将问题放到一个假想的风险中性的世界中进行分析,所得的结果在真实的世界中也成立。

由于在风险中性世界中,所有资产的预期收益率都是无风险利率,任何资产的均衡定价都可以通过对未来预期价值以无风险利率贴现得到,而且,将最后结果直接放回真实世界中就能获得有意义的结果。因此利用风险中性假设可以大大地简化问题的分析过程。下面我们在利用多期二叉树模型对期权进行定价的过程中还可以体会到这一点。

8.2-3 多期二叉树模型

单期二叉树模型虽然简单,但是我们知道,模型的前提是假设股票价格在一段时间以后只有两种可能性,这种假设只有在时间间隔很短的情况下才有一定的合理性,而期权的有效期限一般可以长达几个月,采用单期的二叉树模型显然有很大的局限性。为此,我们将期权的有效期分为若干个小的时间间隔,并假设在每一个小的时间间隔内,股价的变化只有两种可能性:即股价在原有基础上乘 u ,称为上升;或股价在原有基础上乘 d ,称为下降^①。

我们先从一个二期的二叉树模型出发,见下图8.3。

图8.3中每个结点有两个符号,上面一个表示股价,下面一个表示期权价,时间间隔记为 $\Delta t = t_1 - t_0 = t_2 - t_1$ 。在 $t = t_0$ 时刻,股价为 S ,期权价为 c , c 就是我们要求的欧式看涨期权的价格;在 $t = t_1$ 时刻,若股价上升到 Su ,则期权价记为 c_u ,若股价下降至 Sd ,则此时期权价记为 c_d ;到 $t = t_2$ 时刻,即期权到期时刻,股价从 $t = t_1$ 时刻的两种可能发展为三种可能: Su^2 、 Sud 和 Sd^2 ,期权价分别记为 c_{uu} 、 c_{ud} 和 c_{dd} ,由于此时期权已到期,因此:

$$c_{uu} = \max(Su^2 - K, 0)$$

^① u 和 d 满足 $d \leq e^{r(\Delta t)} \leq u$,其中, r 为无风险利率。但 d 不一定小于1,当 d 大于1时,股价不会下降,这里称下降是指与无风险收益相比,以下同。

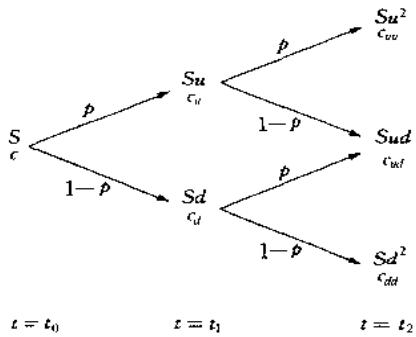


图 8.3 二叉树期权定价模型示意图

$$c_{ud} = \max(Sud - K, 0)$$

$$c_{dd} = \max(Sd^2 - K, 0)$$

在设定二叉树模型的条件下, 即在 u 和 d 已经确定的情况下, c_{uu} , c_{ud} 和 c_{dd} 也能被确定。下面我们按照单期二叉树模型的方法来求 $t = t_1$ 时刻的期权价 c_u :

在 $t = t_1$ 时刻若股价为 Su , 则构造由一份看涨期权和 α 份标的股票组成的组合, 在 t_1 时刻, 该组合的价值记为:

$$V_{t_1} = \alpha Su + c_u$$

股价从 $t = t_1$ 时刻的 Su 出发, 到 $t = t_2$ 时刻有两种可能: Su^2 和 Sud , 两种情况下组合的价值分别记为:

$$V_{t_2}(u) = \alpha Su^2 + c_{uu}$$

$$V_{t_2}(d) = \alpha Sud + c_{ud}$$

令 $V_{t_2}(u) = V_{t_2}(d)$, 得:

$$\alpha = \frac{c_{ud} - c_{uu}}{Su^2 - Sud}$$

$$V_{t_2} = V_{t_2}(u) = V_{t_2}(d) = \frac{uc_{ud} - dc_{uu}}{u - d}$$

取上述 α 以后, 组合为无风险组合, 因此其收益率应为无风险利率 r , 即:

$$V_{t_1} = e^{-r\Delta t} V_{t_2}$$

或

$$\alpha Su + c_u = e^{-r\Delta t} \frac{uc_{ud} - dc_{uu}}{u - d}$$

解得:

$$c_u = \frac{(ue^{-r\Delta t} - 1)c_{ud} - (de^{-r\Delta t} - 1)c_{uu}}{u - d} \quad (8.14)$$

利用同样方法,我们可以得到:

$$c_d = \frac{(ue^{-r\Delta t} - 1)c_{ud} - (de^{-r\Delta t} - 1)c_{dd}}{u - d} \quad (8.15)$$

现在我们有了 c_u 和 c_d ,再对从 $t = t_0$ 到 $t = t_1$ 的阶段重新使用单期二叉树方法,可以得到:

$$c = \frac{(ue^{-r\Delta t} - 1)c_d - (de^{-r\Delta t} - 1)c_u}{u - d} \quad (8.16)$$

将(8.14)式和(8.15)式代入(8.16)式,得:

$$c = \frac{1}{(u - d)^2} (e_u^2 c_{dd} - 2e_u e_d c_{ud} + e_d^2 c_{uu}) \quad (8.17)$$

其中:

$$e_u = ue^{-r\Delta t} - 1, \quad e_d = de^{-r\Delta t} - 1$$

用同样的方法,我们可以求出三期,以至 n 期二叉树模型下的欧式期权的价格。

下面,我们试用风险中性的方法来求 $t = t_0$ 时刻的期权价格 c 。

根据风险中性的假设,在风险中性世界中,股票的期望收益率为无风险利率 r ,因此,在每一时间间隔 Δt 中,股票价格上升的概率为:

$$p = (e^{r\Delta t} - d)/(u - d) = e^{r\Delta t} e_d / (u - d)$$

股票价格下降的概率为:

$$1 - p = (u - e^{r\Delta t}) / (u - d) = e^{r\Delta t} e_u / (u - d)$$

在上一节我们已经知道,在一个关于股票价格的二叉树模型中,期末的股票价格 S_T 服从二项式分布,具体应用到这里的二期的二叉树,我们得到在 $t = t_2$ 时刻,股价取不同值的概率分别为:

股价	期权价	概率
Su^2	c_{uu}	p^2
Sud	c_{ud}	$2p(1-p)$
Sd^2	c_{dd}	$(1-p)^2$

因此,在 $t = t_2$ 时刻,期权价值的期望值为:

$$E(c_T) = p^2 c_{uu} + 2p(1-p)c_{ud} + (1-p)^2 c_{dd}$$

在 $t = t_0$ 时刻,期权价应为:

$$c = e^{-2r\Delta t} E(c_T) = e^{-2r\Delta t} [p^2 c_{uu} + 2p(1-p)c_{ud} + (1-p)^2 c_{dd}]$$

将 p 及 $1-p$ 代入上式,得:

$$\begin{aligned} c &= e^{-r\Delta} [e^{2r\Delta} e_d^2 c_{uu} - 2e^{r\Delta} e_u e_d c_{ud} + e^{2r\Delta} e_u^2 c_{dd}] / (u-d)^2 \\ &= \frac{1}{(u-d)^2} (e_u^2 c_{dd} - 2e_u e_d c_{ud} + e_d^2 c_{uu}) \end{aligned} \quad (8.18)$$

与上面沿二叉树一步一步倒推回来得到的结果完全一样。

我们看到,利用风险中性方法可以直接从股价的最后分布情况得出结果,不需要沿二叉树一步一步倒推回来,比较简单。可以想象,当二叉树的期数比较多的时候,一步一步倒推方法的工作量会变得非常巨大,而使用风险中性方法的工作量则几乎没有增加。

下面利用风险中性方法给出 n 期二叉树模型下的欧式看涨期权定价公式:

对 n 期的二叉树模型,期权到期时,即 $t = t_n$ 时,股票价格为 $Su^k d^{n-k}$ 的概率为:

$$b(k; n, p) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

其中, $p = (e^{r\Delta} - d) / (u - d)$, $1 - p = (u - e^{r\Delta}) / (u - d)$ 。此时,到期期权的价值记为:

$$c_T(k) = \max(Su^k d^{n-k} - K, 0) \quad (8.19)$$

其期望值为:

$$E(c_T) = \sum_{k=0}^n b(k; n, p) c_T(k) = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k} c_T(k) \quad (8.20)$$

在 $t = t_0$ 时刻,期权价应为:

$$\begin{aligned} c &= e^{-r\Delta} E(c_T) = e^{-r\Delta} \sum_{k=0}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k} c_T(k) \\ &= \frac{1}{(u-d)^n} \sum_{k=0}^n C_n^k (1 - de^{-r\Delta})^k (ue^{-r\Delta} - 1)^{n-k} \max(Su^k d^{n-k} - K, 0) \end{aligned} \quad (8.21)$$

8.2-4 看跌期权

对于看跌期权,上述的二叉树方法也完全可以适用。在此,我们仅以单期二叉树为例说明。

考虑一个执行价格为 K 的欧式看跌期权,设在期权交易时即 t 时刻,其标的股票价格为 S ,根据二叉树模型的假定,在期权到期时,股票价格 S_T 只可能是 Su 或 Sd ,可见到期时期权价值可能为 $\max(K - Su, 0)$ 或 $\max(K - Sd, 0)$,我们分别记为 $p_T(u)$ 和 $p_T(d)$ 。现在我们构造这样一个组合,它由一份看跌期权和 α 份标的股票组成,在 t 时刻,该组合的价值记为:

$$V_t = \alpha S + p$$

其中, p 是期初看跌期权的价格, 也就是我们要求的东西。然后我们再看该组合在期权到期时, 即 T 时刻的价值 V_T , 如果到期时股票价格为 Su , 则

$$V_T = V_T(u) = \alpha Su + p_T(u) = \alpha Su + \max(K - Su, 0)$$

若到期时股票价格为 Sd , 则

$$V_T = V_T(d) = \alpha Sd + p_T(d) = \alpha Sd + \max(K - Sd, 0)$$

其中, S 和 K 为已知, u 和 d 由股票价格的二叉树模型设定, α 在构造组合的时候由人为确定。如果我们在构造组合的时候, 选取这样一个 α , 使得 $V_T(u) = V_T(d)$, 就可以完全确定组合在 T 时刻的价值。可见, 这样得到的一个组合是一个无风险组合。

下面我们来看, α 应如何选择才能使组合为无风险, 令:

$$V_T(u) = V_T(d)$$

即

$$\alpha Su + \max(K - Su, 0) = \alpha Sd + \max(K - Sd, 0)$$

可解得:

$$\alpha = \frac{\max(K - Sd, 0) - \max(K - Su, 0)}{Su - Sd} \quad (8.22)$$

设 $u > d$, 则 $\max(K - Sd, 0) - \max(K - Su, 0) > 0$, $Su - Sd > 0$, 可见 $\alpha > 0$, 表示应持有股票^①。

确定了 α 以后, 我们就得到在 T 时刻组合的价值为:

$$V_T = \frac{Su \max(K - Sd, 0) - Sd \max(K - Su, 0)}{Su - Sd} \quad (8.23)$$

由于该组合是一个无风险组合, 因此在 t 到 T 期间, 它的收益应为无风险收益, 即:

$$V_t = \alpha S + p = e^{-r(T-t)} V_T$$

其中, r 为无风险利率。解以上方程, 我们可以得到:

$$\begin{aligned} p &= e^{-r(T-t)} V_T - \alpha S \\ &= \frac{(e^{-r(T-t)} Su - S) \max(K - Sd, 0) - (e^{-r(T-t)} Sd - S) \max(K - Su, 0)}{Su - Sd} \end{aligned} \quad (8.24)$$

即为该看跌期权在 t 时刻的价格。

事实上, 对于不付红利股票的欧式期权, 看涨和看跌期权价格之间有明确的平价关系, 当我们知道了一个的价格之后, 可以很容易地利用平

^① 若 $\max(Sd - K, 0) - \max(Su - K, 0) = 0$, 则表示 $K < Sd < Su$, 到期时股票价格不可能低于执行价, 该看跌期权价值为零。

价关系求出另一个。读者可以把我们上面在单期二叉树模型下得到的看涨期权价格 c 和看跌期权价格 p 代入下面的平价关系式中验证一下：

$$c + Ke^{-r(T-t)} = p + S$$

例 8.2 同例 8.1 一样, 设 A 股票现价 50 元, 一个月后的股价可能是 60 元或 45 元, 当前无风险利率为 12%, 求以 A 股票为标的资产, 执行价为 50 元, 一个月后到期的欧式看跌期权的价格。

根据题意, $S = 50$, $S_u = 60$, $S_d = 45$, $r = 0.12$, $T-t = 1/12$, $K = 50$ 。

解法一: 直接代入公式(8.24):

$$\begin{aligned} p &= \frac{(e^{-r(T-t)} S_u - S) \max(K - S_u, 0) - (e^{-r(T-t)} S_d - S) \max(K - S_d, 0)}{S_u - S_d} \\ &= \frac{(e^{-0.01} \times 60 - 50) \times 5 - (e^{-0.01} \times 45 - 50) \times 0}{60 - 45} = 3.1343 \end{aligned}$$

解法二: 根据上述思路构造组合(略)。

解法三: 利用平价关系:

在例 8.1 中, 我们已经得到相应的看涨期权的价格为 3.6318, 则看跌期权的价格为:

$$\begin{aligned} p &= c + Ke^{-r(T-t)} - S \\ &= 3.6318 + 50 \times e^{-0.01} - 50 = 3.1343 \end{aligned}$$

同样, 利用风险中性假设的方法, 在 n 期的二叉树模型下可以得到看跌期权价为:

$$\begin{aligned} p_t &= e^{-rt\Delta t} E(p_T) = e^{-rt\Delta t} \sum_{k=0}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k} p_T(k) \\ &= \frac{1}{(u-d)^n} \sum_{k=0}^n C_n^k (1-de^{-rt\Delta t})^k (ue^{-rt\Delta t}-1)^{n-k} \max(K - Su^k d^{n-k}, 0) \end{aligned} \quad (8.25)$$

注意, 上式中的 p_t 和 p_T 分别表示期初和期末看跌期权的价值, 而 p 是二叉树模型中股票价格上升的概率, 为避免混淆, 我们在表示看跌期权价的符号下加了下标。读者同样可以把在 n 期二叉树模型下得到的看涨期权价格 c 和看跌期权价格 p 代入平价关系式进行检验。

8.3 Black-Scholes 期权定价模型

上面我们得到了在二叉树模型下, 股票期权的定价公式, 但是在实践中, 单期的二叉树模型过于粗略, 与实际情况往往相差太大, 而多期的二叉树模型的结果与

期数有关,而且当期数比较大的时候,计算比较复杂。事实上,早在 1973 年,布莱克(Black)和斯科尔斯(Scholes)的开创性的工作,已经使我们有了一个令人满意的均衡期权定价模型。Black-Scholes 定价模型涉及到复杂的随机微积分知识,复杂的推导往往不能使读者理解其金融含义。后来夏普(William Sharp)给出了一个简单的推导公式,只需要用到简单的数学方法。我们将采取他的推导方法,从比较容易理解的二叉树模型出发,推广到连续形式,得到 Black-Scholes 定价公式。

8.3-1 股票价格运动模型

在上一节的二叉树模型中,我们对股票价格的变化作了一种非常简单的假设,这里我们再仔细探讨一下股票价格运动的规律。

股票的价格,一般来讲,取决于公司的财务因素、经济因素和股票市场的状况。经济状况好,公司的赢利能力强,大家对投资于股市有信心,股票的价格就高,反之,股票的价格就比较低。股票的价格反映了人们对将来的预期,它取决于股票未来红利的大小和风险。在股票市场上,有一种理论,称之为有效市场理论。有效市场理论告诉我们,股票的现价包含了当前所知道的有关股票的一切信息,当然也包括了股票的历史价格,股票将来的价格则只与今天的价格有关,与过去的价格无关。正因为对股票价格的上述认识,股票价格的变化过程常常可以通过维纳过程(Wiener processes)的函数来描述。

下面我们先介绍一下维纳过程:

设 z 是一个随机过程变量,如果它满足:

(1) $\Delta z = \epsilon \sqrt{\Delta t}$, 其中 ϵ 服从标准正态分布;

(2) 对任何两个不同的 Δt , Δz 的值相互独立,其中, Δz 是在时间间隔 Δt 内随机变量 z 的变化;

则称 z 服从维纳过程。

若采用微分形式,则表示为:

$$dz = \epsilon \sqrt{dt}$$

在任意长度为 T 的时间间隔内,服从标准维纳过程的变量的值的变化服从均值为 0、方差为 T 的正态分布。

根据有效市场理论,股票将来的价格只与今天的价格有关,与过去的价格无关,股票价格的变化无法预测。因此不妨将股票价格作为一个随机过程变量来考察。对于不付红利的股票,作为一种投资工具,它必须给投资者带来收益,假设它的价格变化的期望值为零是不合理的,随着时间的变化,其价格应该有一个上升的趋势,因此我们假设不付红利股票的价格 S 服从如下随机过程:

$$dS = adt + bdz \quad (8.26)$$

其中, a 和 b 分别称为期望漂移率和方差率, dz 是一个标准的维纳过程在 dt 时间

内的变化。显然,上式中的参数 a 和 b 如果设为常数是不合适的。首先,投资者关心的是投资的收益率,对同一股票,当股价升高以后,投资者的投资量也就大了,因此要求的回报也就增加了。另外,方差率反映股票价格的波动情况,当股票价格比较高的时候,它的波动当然也会比较大。一个比较合理的假设是上述期望漂移率和方差率应与股票价格本身成正比,股票价格 S 服从的随机过程重新表示为:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad (8.27)$$

或

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz \quad (8.28)$$

这是使用最为广泛的一种描述股票价格行为的模型。其中 μ 通常称为股票价格的预期收益率, σ 通常称为股票价格的波动率(volatility)。

根据上述模型,由于(8.28)式等价于:

$$d(\ln S) = \mu dt + \sigma dz \quad (8.29)$$

其中 μ 和 σ 为常数,我们可以得到,在 $t \rightarrow t + \Delta t$ 期间,股价按连续复利计算的收益率为:

$$\ln S_{t+\Delta t} - \ln S_t = \mu \Delta t + \sigma \Delta z \quad (8.30)$$

即在 $t \rightarrow t + \Delta t$ 期间,股价收益率服从均值为 $\mu \Delta t$,方差为 $\sigma^2 \Delta t$ 的正态分布。

8.3-2 二叉树模型的连续形式

现在我们来考虑一个基于不付红利的股票的欧式看涨期权,到期时刻为 T ,根据 n 期二叉树模型的结果,在期权交易时刻 t ,其价值应为:

$$c = e^{-rt\Delta t} \sum_{k=0}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k} c_T(k) \quad (8.31)$$

其中, $\Delta t = (T-t)/n$, $c_T(k) = \max(S u^k d^{n-k} - K, 0)$ 。

为了确定二叉树模型中的参数 u , d 和 p ,我们先来考察一下到期时刻股票价格 S_T 的分布情况。

假设在 n 期中,股价有 j 次上升、 $n-j$ 次下降,则

$$S_T = S u^j d^{n-j}$$

于是在 $t \rightarrow T$ 期间,股票价格的连续复利收益率为:

$$\ln(S_T/S) = j \ln u + (n-j) \ln(d) = j \ln(u/d) + n \ln(d) \quad (8.32)$$

若在每一周期内,股价上升的概率为 p ,下降的概率 $1-p$,则该收益率的期望值和方差分别为:

$$E[\ln(S_T/S)] = np \ln(u/d) + n \ln(d) \quad (8.33)$$

$$\text{var}[\ln(S_T/S)] = np(1-p) \ln^2(u/d) \quad (8.34)$$

由于相对来说,多期的二叉树模型,当它的期数越多,对现实的拟合情况就越好,下面我们就考虑 n 期二叉树模型当 n 趋向无穷大时的极限情况。

根据上面的讨论,对股票价格一个比较好的模型是,在 $t \rightarrow T$ 时间间隔内,股价的收益率应服从均值为 $\mu(T-t)$, 方差为 $\sigma^2(T-t)$ 的正态分布,因此我们在选择 n 期二叉树模型中的参数 u , d 和 p 的时候,应使它们满足:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} np \ln(u/d) + n \ln(d) = \mu(T-t) \quad (8.35)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} np(1-p) \ln^2(u/d) = \sigma^2(T-t) \quad (8.36)$$

为了满足上述条件,我们可以取:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, d = 1/u = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}, p = \frac{1}{2} + \frac{\mu}{2\sigma}\sqrt{\Delta t}$$

但是,我们注意到,上述参数的取值满足的是在现实世界中的股票价格分布,而为了要利用(8.31)式计算期权的价格,我们必须在风险中性的世界中进行,因此我们必须得到在风险中性的世界中每一周期股价上升的概率。为了与现实世界中的概率 p 相区别,我们用 q 来表示在风险中性的世界中每一周期股价上升的概率,由于在风险中性世界中,每一周期内股价的收益率应为无风险利率 r ,所以:

$$Suq + Sd(1-q) = Se^{r\Delta t}$$

得:

$$q = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}.$$

有了这些参数,下一步的工作就是在 n 趋向于无穷大的情况下,利用(8.31)式计算看涨期权的价值。注意,需将(8.31)中的 p 换成 q 。

8.3-3 Black-Scholes 定价公式

现在,我们来讨论,当 n 趋向无穷大时, n 期二叉树模型得出的期权定价公式是一个什么样的形式。我们把(8.31)式再重写一遍:

$$c = e^{-r\Delta t} \sum_{k=0}^n C_n^k q^k (1-q)^{n-k} \max(Su^k d^{n-k} - K, 0) \quad (8.37)$$

设 j 是使 $Su^j d^{n-j}$ 刚好大于执行价 K 的值,即满足:

$$Su^{j-1} d^{n-j+1} \leq K < Su^j d^{n-j} \quad (8.38)$$

则(8.37)式可改写为:

$$\begin{aligned} c &= e^{-r\Delta t} \sum_{k=j}^n C_n^k q^k (1-q)^{n-k} (Su^k d^{n-k} - K) \\ &= Se^{-r\Delta t} \sum_{k=j}^n C_n^k q^k (1-q)^{n-k} u^k d^{n-k} - Ke^{-r\Delta t} \sum_{k=j}^n C_n^k q^k (1-q)^{n-k} \end{aligned}$$

$$= Se^{-rt} X_1 - Ke^{-rt} X_2 \quad (8.39)$$

式中：

$$X_1 = \sum_{k=j}^n C_n^k q^k (1-q)^{n-k} u^k d^{n-k}$$

$$X_2 = \sum_{k=j}^n C_n^k q^k (1-q)^{n-k}$$

其中 X_2 是一个标准的二项式分布函数：

$$X_2 = \sum_{k=j}^n C_n^k q^k (1-q)^{n-k} = 1 - \sum_{k=0}^{j-1} C_n^k q^k (1-q)^{n-k} \quad (8.40)$$

当 n 很大时，二项式分布逼近正态分布：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_2 = 1 - N\left(\frac{j-1-nq}{\sqrt{nq(1-q)}}\right) \quad (8.41)$$

其中， $N(\cdot)$ 是标准的累积正态分布函数。

而 X_1 也可通过适当的变化化作二项式分布函数，在 n 很大时，用正态分布逼近。

最后，在 n 趋向无穷大，并且在

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad d = 1/u = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad q = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} \quad (8.42)$$

的条件下，得到：

$$c = SN(d_1) - e^{-r(T-t)} KN(d_2) \quad (8.43)$$

$$\text{其中, } d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/K) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

以上就是著名的 Black-Scholes 期权定价公式，它的基本形式适用于不付红利股票的欧式看涨期权。Black-Scholes 公式的具体推导过程见本章附录。

上面我们得到了基于不付红利股票的欧式看涨期权的定价公式，利用欧式看涨期权和看跌期权的平价关系，我们可以很容易地得到相应的看跌期权的定价公式：

$$\begin{aligned} p &= c + e^{-r(T-t)} K - S \\ &= e^{-r(T-t)} KN(-d_2) - SN(-d_1) \end{aligned} \quad (8.44)$$

8.3~4 Black-Scholes 公式的一般性质

在 Black-Scholes 公式（以下简称 B-S 公式）中，共有 S , K , r , σ , 和 $(T-t)$ 5

个参数,下面我们考察当某些参数取极端情况时,B-S公式给出的结果。

(1) $S \gg K$ 。

股票现价远大于执行价,表明看涨期权将肯定会被执行,此时的期权与一个执行价为 K 的远期合约非常相似,在这种情况下,该远期合约多头的价值应为:

$$S - Ke^{-r(T-t)}$$

而按照 B-S 公式,当 $S \gg K, d_1, d_2$ 都非常大, $N(d_1)$ 和 $N(d_2)$ 都接近 1, 因此看涨期权的价格也接近 $S - Ke^{-r(T-t)}$ 。

对看跌期权来说,股票现价远大于执行价,表明看跌期权将肯定不会被执行,因此其价值应接近于零。从 B-S 公式看,当 $S \gg K, -d_1, -d_2$ 都非常小, $N(-d_1)$ 和 $N(-d_2)$ 都接近 0, 因此,看涨期权的价格也接近 0。

(2) $S \ll K$ 。

与 $S \gg K$ 的情况相反,股票现价远小于执行价,表示看涨期权将肯定不会被执行,而看跌期权将肯定会被执行。因此,看涨期权的价值应接近于 0,而看跌期权的价值应接近于一个相应的远期合约空头的价值,该远期合约空头的价值为:

$$Ke^{-r(T-t)} - S$$

从对 B-S 公式的分析,我们可以得到, c 接近于 0, 而 p 接近于 $Ke^{-r(T-t)} - S$ 。

(3) $(T-t) \rightarrow 0$ 。

在期权接近于到期时,其价格应接近于其到期价值,我们知道:

$$c_T = \max(S_T - K, 0) \quad p_T = \max(K - S_T, 0)$$

因此时已接近于到期时刻,因此股票现价 S 与 S_T 应很接近。

从 B-S 公式看,当 $(T-t) \rightarrow 0$ 时, $d_1, d_2 \rightarrow \pm\infty$, 其符号取决于 K 和 S 的相对大小。

若 $S > K$, 则 $d_1, d_2 \rightarrow +\infty, N(d_1), N(d_2) \rightarrow 1, N(-d_1), N(-d_2) \rightarrow 0$, 从而:

$$c \approx S - K, p \rightarrow 0$$

若 $S < K$, 则 $d_1, d_2 \rightarrow -\infty, N(d_1), N(d_2) \rightarrow 0, N(-d_1), N(-d_2) \rightarrow 1$, 从而:

$$c \rightarrow 0, p \approx K - S$$

(4) $\sigma \rightarrow 0$ 。

若股票价格波动率趋近于零,表示股票是没有风险的,它的价格将从 t 时刻的 S 以无风险利率 r 增长到 T 时刻的 $S_T = Se^{r(T-t)}$ 。因此在 t 时刻,期权的价值应为:

$$c = e^{-r(T-t)} \max(Se^{r(T-t)} - K, 0) \quad p = e^{-r(T-t)} \max(K - Se^{r(T-t)}, 0)$$

按照 B-S 公式,当 $\sigma \rightarrow 0$ 时, $d_1, d_2 \rightarrow \pm\infty$, 其符号取决于 $\ln(S/K) + r(T-t)$ 的正负。

若 $\ln(S/K) + r(T-t) > 0$, 即 $Se^{r(T-t)} - K > 0$, 则 $d_1, d_2 \rightarrow +\infty, N(d_1), N(d_2) \rightarrow 1, N(-d_1), N(-d_2) \rightarrow 0$, 从而:

$$c \approx S - e^{-r(T-t)} K, p \rightarrow 0$$

若 $\ln(S/K) + r(T-t) < 0$, 即 $S e^{r(T-t)} - K < 0$, 则 $d_1 d_2 \rightarrow -\infty, N(d_1)N(d_2) \rightarrow 0, N(-d_1)N(-d_2) \rightarrow 1$, 从而:

$$c \rightarrow 0, p \approx e^{-r(T-t)} K - S$$

本章小结

为了确定股票期权的价格,我们需要知道有关股票未来价格的信息,或者说,我们要知道股票价格将如何变化。因此任何期权定价模型都必须对未来股票价格的变化有一个比较合理的假设。

在单期的二叉树模型中,假设股价在一个时间段之后,只有两种可能取值,按一定的概率分别从当前的股价上升或下降。当时间间隔比较小的时候,这个模型对于股票价格变化的描述具有一定的合理性。但是当时间间隔比较长的时候,这种假设就显得不够合理了,为此,人们把单期的二叉树模型扩展到多期的二叉树模型,把整个需要考察的时间段分成很多个小的时间段,在每一个小的时间段中,像在单期模型中那样,假设股价在原有基础上只有两种可能的变化:上升或下降。通常我们假设每一个小的时间段长度相同,股价经过一期上升和一期下降后达到的结果与股价经过一期下降和一期上升后达到的结果相同,这样每增加一期,最后的股价就多一种可能的取值。当每一小的时间段很短的时候,即使整个时间段比较长,多期二叉树模型仍是对现实情况的一个很好的近似。

在单期的二叉树模型下估计股票期权的价值,由于股票的到期价格只有两种可能性,在这两种可能的取值下,期权的到期价值也可以相应地确定,因此,我们可以设法用期权和股票本身构造组合,使该组合的到期价值在两种可能情况下相等,该组合实际上是一个无风险组合。按照套利定价的原理,对无风险组合进行投资就应该得到无风险收益,所以我们可以从该组合的到期价值中得出其当前价值。由于组合中股票的当前价值已知,从组合的当前价值中减去组合中股票的当前价值就是组合中期权的当前价值,从而确定期权的价格。

在多期二叉树模型下,为了估计股票期权的价值,我们可以在每一个小的时间段中,按照单期二叉树模型的方法来确定时间段初与时间段末的期权价值的关系。由于在期权到期时期权的价值可以确定,因此只要沿二叉树从最后一期倒推到第一期就可以得到期权的当前价格。

风险中性假设是指:如果对一个问题的分析过程与投资者的风险偏好无关,则可以将问题放到一个假想的风险中性的世界中进行分析,所得的结果在真实的世界中也成立。对股票期权的定价过程正符合这种情况,因此我们可以在风险中性世界中构造二叉树,避免了在真实世界中构造二叉树需要考虑的股票价格实际收益率的问题。

对于欧式期权来说,由于不存在提前执行的可能,期权价值仅取决于到期时标

的股票的价格分布情况,因此利用风险中性假设,我们可以在风险中性世界中计算在多期二叉树模型下期权到期价值的期望值,然后用无风险利率折现,直接得到期权的当前价值,避免了沿二叉树倒推的麻烦。但是对美式期权来说,由于存在提前执行的可能,期权的价值不仅与股票的到期价格有关,与股票价格变化的路径也有关系,因此不能直接从到期时标的股票的价格分布中得到结果,必须沿二叉树倒推。

Black-Scholes 期权定价公式是现代金融理论的一个重要成果,在实践中也得到了广泛应用,其基本形式适用于不付红利股票的欧式看涨期权。为了避免随机微积分和概率分布函数等复杂的数学推导,我们利用将二叉树模型连续化的方法得到了 Black-Scholes 公式。

复习与思考

1. 用构造无风险组合的方法(解法二),对例 8.2 中的看跌期权进行定价。
2. 设参数为已知,试推导二期二叉树模型下,欧式看跌期权的定价公式。
3. 设某股票现价 30 元,股价波动率 30%,无风险利率 6%。考虑以该股票为标的,执行价为 30 元,有效期为 3 个月的欧式看涨期权,设期权有效期内该股票无红利支付。利用 Black-Scholes 公式计算该期权价值。
4. 根据上题给定的条件,构造股价的二叉树模型,并利用二叉树模型确定期权价值(采用三期的二叉树)。
5. 根据上题给定的条件,利用二叉树模型确定相应的看跌期权的价值。并验证平价关系。
6. 设股票 A 现价 50 元,3 个月后可能为 70 元,也可能为 40 元,某衍生证券有效期 3 个月,到期价值为 $\max(55, S_T)$,其中 S_T 为 A 股票的到期价值,无风险利率为 6%。试利用二叉树方法确定此衍生证券的价值。

参考文献

- Hans R. Stoll and Robert E. Whaley, 1993, *Futures and Options*, South-Western Publishing Co. .
- John O'Brien and Sanjay Srivastava, 1995, *Investments—A Visual Approach*, South-Western College Publishing.
- John C. Hull, 2001,《期权、期货和其他衍生品》(第 4 版,英文影印版),清华大学出版社。
- 迈哈伊·马图,2000,《结构化衍生工具手册》,林涛、杜育欣、王晖、高强译,经济科学出版社。
- 宋逢明,1999,《金融工程原理——无套利均衡分析》,清华大学出版社。

附录 Black-Scholes 期权定价公式的推导

在 n 期二叉树模型中, 欧式看涨期权的定价公式为:

$$c = e^{-rt} \sum_{k=0}^n C_n^k q^k (1-q)^{n-k} \max(Su^k d^{n-k} - K, 0) \quad (8a. 1)$$

其中,

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad d = 1/u = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$q = \frac{e^{\sigma\Delta t} - d}{u - d} \quad \Delta t = \frac{T-t}{n}$$

设 j 是使 $Su^j d^{n-j}$ 刚好大于 K 的值, 即满足:

$$Su^{j-1} d^{n-j+1} \leq K < Su^j d^{n-j} \quad (8a. 2)$$

则(8a. 1)式可改写为:

$$\begin{aligned} c &= e^{-rt} \sum_{k=j}^n C_n^k q^k (1-q)^{n-k} (Su^k d^{n-k} - K) \\ &= Se^{-rt} \sum_{k=j}^n C_n^k q^k (1-q)^{n-k} u^k d^{n-k} - Ke^{-rt} \sum_{k=j}^n C_n^k q^k (1-q)^{n-k} \\ &= Se^{-rt} X_1 - Ke^{-rt} X_2 \end{aligned} \quad (8a. 3)$$

其中:

$$X_1 = \sum_{k=j}^n C_n^k (qu)^k [(1-q)d]^{n-k}$$

$$X_2 = \sum_{k=j}^n C_n^k q^k (1-q)^{n-k} = 1 - \sum_{k=0}^{j-1} C_n^k q^k (1-q)^{n-k}$$

我们先来看 X_2 , 这是一个标准的二项式分布函数, 当 n 很大时, 二项式分布逼近正态分布:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_2 = 1 - N\left(\frac{j-1-nq}{\sqrt{nq(1-q)}}\right) = N\left(\frac{nq-j+1}{\sqrt{nq(1-q)}}\right) \quad (8a. 4)$$

其中, $N(\cdot)$ 是标准的累积正态分布函数。

对 X_1 , 尽管它的形式与 X_2 很相似, 但毕竟还不是标准的二项式分布函数, 需要通过适当的变换才行。令:

$$X_0 = \sum_{k=0}^n C_n^k (qu)^k [(1-q)d]^{n-k} = [qu + (1-q)d]^n \quad (8a. 5)$$

因:

$$q = (e^{\sigma\Delta t} - d)/(u - d) \quad \Delta t = (T-t)/n$$

可得：

$$X_0 = e^{r(T-t)}$$

于是，

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{e^{r(T-t)}}{[qu + (1-q)d]^n} \sum_{k=1}^n C_n^k (qu)^k [(1-q)d]^{n-k} \\ &= e^{r(T-t)} \sum_{k=1}^n C_n^k \left[\frac{qu}{qu + (1-q)d} \right]^k \left[\frac{(1-q)d}{qu + (1-q)d} \right]^{n-k} \\ &= e^{r(T-t)} \sum_{k=1}^n C_n^k \left[\frac{qu}{qu + (1-q)d} \right]^k \left[1 - \frac{qu}{qu + (1-q)d} \right]^{n-k} \quad (8a. 6) \end{aligned}$$

再令：

$$p = \frac{qu}{qu + (1-q)d} = \frac{qu}{e^{r\Delta t}} \quad (8a. 7)$$

得：

$$X_1 = e^{r(T-t)} \sum_{k=1}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (8a. 8)$$

这时就可以用与求 X_2 相同的方法得到当 n 趋向于无穷大时 X_1 的值了：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_1 = e^{r(T-t)} \left[1 - N \left(\frac{j-1-np}{\sqrt{np(1-p)}} \right) \right] = e^{r(T-t)} N \left(\frac{np-j+1}{\sqrt{np(1-p)}} \right) \quad (8a. 9)$$

将(8a. 7)式代入(8a. 9)式可得：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_1 = e^{r(T-t)} N \left(\frac{nqu - e^{r\Delta t}(j-1)}{\sqrt{nq(1-q)}} \right) \quad (8a. 10)$$

将(8a. 4)和(8a. 10)式代入(8a. 3)式，在 $n \rightarrow \infty$ 的情况下， n 期二叉树模型得出的欧式看涨期权定价公式为：

$$c = SN \left(\frac{nqu - e^{r\Delta t}(j-1)}{\sqrt{nq(1-q)}} \right) - e^{-r(T-t)} KN \left(\frac{nq-j+1}{\sqrt{nq(1-q)}} \right) \quad (8a. 11)$$

令：

$$d_1 = \frac{nqu - e^{r\Delta t}(j-1)}{\sqrt{nq(1-q)}} \quad (8a. 12)$$

$$d_2 = \frac{nq-j+1}{\sqrt{nq(1-q)}} \quad (8a. 13)$$

下一步的任务就是求出在 $n \rightarrow \infty$ 情况下， d_1 和 d_2 的值。

首先，我们看 j 的取值，由 j 的定义可得：

$$j = \frac{\ln(K/Sd^n)}{\ln(u/d)} + \epsilon = \frac{\ln(K/S) - n\ln(d)}{\ln(u) - \ln(d)} + \epsilon \quad (8a. 14)$$

其中， ϵ 是介于 0 和 1 之间的一个数。

由 $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$, $d = 1/u = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$ 可得:

$$j = \frac{\ln(K/S) + n\sigma\sqrt{\Delta t}}{2\sigma\sqrt{\Delta t}} + \varepsilon \quad (8a. 15)$$

再看 q , 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有:

$$q \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{r - \sigma^2/2}{2\sigma} \sqrt{\Delta t}$$

于是,

$$\sqrt{nq(1-q)} \rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{n}$$

另外, 在 $n \rightarrow \infty$ 时, $\Delta t \rightarrow 0$, 则:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \rightarrow 1 + \sigma\sqrt{\Delta t}$$

$$e^{r\Delta t} \rightarrow 1$$

经整理, 可得:

$$d_1 = \frac{nqu - e^{r\Delta t}(j-1)}{\sqrt{nq(1-q)}} \rightarrow \frac{(r + \sigma^2/2)(T-t) - \ln(K/S)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (8a. 16)$$

$$d_2 = \frac{nq - j + 1}{\sqrt{nq(1-q)}} \rightarrow \frac{(r - \sigma^2/2)(T-t) - \ln(K/S)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (8a. 17)$$

最后, 将(8a. 16)式和(8a. 17)式代入(8a. 11)式, 得到:

$$c = SN(d_1) - e^{-r(T-t)} KN(d_2) \quad (8a. 18)$$

其中, $d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$

$$d_2 = \frac{\ln(S/K) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

以上就是对不付红利股票的欧式看涨期权的 Black-Scholes 定价公式。

期权定价模型的使用

9.1 Black-Scholes 模型的使用

9.1-1 累积正态分布函数

B-S 公式的形式看起来还比较简单,好像用一般的含有指数、对数等功能的计算器就能根据给定的参数计算出期权价格似的。但是,真正用的时候,读者就会发现,其中还有一个累积正态分布函数 $N(\cdot)$ 。根据定义,这个函数的表达式为:

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-x^2/2} dx \quad (9.1)$$

这是一个定积分,可以用数值方法进行计算,但计算起来并不方便。不过,幸运的是,由于这个函数被用到的情况非常多,其函数值已被编制成表格供人们使用,因此当我们知道参数 d 后,只要通过查表即可得到累积正态分布函数 $N(d)$ 的值。

另外,有一种只使用计算器来计算该函数近似值的公式:

$$N(d) = \begin{cases} 1 - N'(d)(a_1 k + a_2 k^2 + a_3 k^3) & \text{如果 } d \geq 0 \\ 1 - N(-d) & \text{如果 } d < 0 \end{cases} \quad (9.2)$$

其中:

$$N'(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-d^2/2}$$

$$k = \frac{1}{1 + d\gamma}$$

$$\gamma = 0.33267$$

$$a_1 = 0.4361836$$

$$a_2 = -0.1201676$$

$$a_3 = 0.937298$$

这种近似计算得出的 $N(d)$ 的值通常可以精确到小数点后 4 位。在手边没有现成的正态分布函数表可以使用的时候,不妨用此公式进行计算。

9.1-2 参数的确定

根据 B-S 期权定价模型,期权的价格依赖于股票的现价 S 、期权的执行价 K 、现在离到期日的时间长度 $T-t$ 。其中,股票的现价 S 可以直接从市场上观测得到,期权的执行价 K 和距离到期日的时间长度 $T-t$ 是由期权的条款和交易时间确定的,不会有任何疑义,只是其中有一点要注意,即时间长度 $T-t$ 一般是以年为单位。考虑一个股票期权,假定期权交易日为 2001 年 9 月 1 日,期权的到期日是 2001 年 10 月 7 日,则交易日距离到期日还有 36 天,以年为单位表示则记为 $T-t = 36/365 = 0.0986$ 年。

在确定了 S 、 K 和 $T-t$ 之后,为了要使用 B-S 公式计算期权的价格,必须通过适当的方法确定股票价格的波动率 σ 和无风险利率 r 这两个参数。

首先,我们来看无风险利率 r ,它应该是在期权有效期内的无风险利率,由于期权的有效期通常不会太长,一般人们利用具有类似有效期的短期国债的市场价格来确定这一段时间的无风险利率。假定与上述期权具有类似到期日的一个短期国债在 2001 年 10 月 8 日到期,其卖价折现率为 10.20%,买价折现率为 10.30%。如果面值按 100 元计算的话,其现价表示为:

$$\text{国债现价} = 100 \left[1 - 0.01 \left(\frac{10.20 + 10.30}{2} \right) \left(\frac{36}{360} \right) \right] = 98.98(\text{元})$$

从而可以计算出无风险利率为:

$$r = \frac{360}{36} [\ln(100) - \ln(98.98)] = 10.25\%$$

股票价格的波动率 σ 实际上是在期权有效期间单位时间内股价收益率的标准差。由于它反映的是未来时段内股票价格的波动情况,我们无法确切知道它的值,只能通过某种方法对它进行估计。

利用历史数据估计波动率是一种常见的方法。假定观测到股票价格的历史数据为 $S_0, S_1, S_2, \dots, S_n$,不妨假定是周度数据,即 S_i 是第 i 周的收盘价。B-S 模型假定股票价格服从几何布朗运动相当于假定股票价格的连续复利回报率服从正态分布。股票价格回报率的周度期望值和方差的估计值为:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n [\ln(S_j) - \ln(S_{j-1})] \quad (9.3)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n [\ln(S_j) - \ln(S_{j-1}) - \hat{\mu}]^2 \quad (9.4)$$

周回报率的期望值和方差分别乘以一年的周数就得到了年期望回报率和方

差。在利用历史数据估计波动率时，常常会遇到股票分红或送股的情况，这时股票价格数据要经过调整才能反映真实的股票回报率。

估计波动率的另一种方法称为隐含波动率法。所谓的隐含波动率(implied volatility)实际上是指在市场中观测到的期权价格中所蕴含的波动率。因为把B-S公式当作一个方程式，在公式中其他的参数都已经确定的情况下，知道股价波动率固然可以求出期权价格，而如果知道期权价格的话，反过来也可以求出波动率。期权价格是可以在市场上观测得到的，每一个期权价格实际上就隐含了一个波动率。在这里读者可能会问，估计波动率的目的，就是要利用B-S公式计算期权价格，而既然已经知道了期权价格，还要这个隐含波动率干什么呢？这是因为，隐含波动率是用来估计某种股票的波动率的，而以一种股票为标的的期权往往不止一个，不但有看涨期权，有看跌期权，而且以同一种股票为标的的期权还可以有不同的执行价和不同的到期日，这样就有多个期权是以同一种股票为标的的，按照B-S模型，计算这些期权的价格用的是同一个波动率^①。因此，可以利用从一个或几个期权的市场价格中得出的隐含波动率去计算基于同一种股票的其他期权的价值。

事实上，对于市场上交易的基于同一种股票的各种期权，从它们的价格中得出的隐含波动率往往是不一致的，我们可能需要把它们作适当的平均以后才能作为该股票的隐含波动率使用。从基于同一种股票的不同期权的价格中得出的隐含波动率不一致，很可能是由于不同期权的交易者对波动率的认识不一致造成的，或者说，是由于不同的期权价格对波动率的敏感度不同而导致的。举一个比较极端的例子：比较一个两平期权和一个处于深度虚值状态的期权，两平期权的交易者知道波动率对期权价格有很大影响，因此他会仔细地研究波动率，作出比较谨慎的判断；而对一个处于深度虚值状态的期权来说，其价值接近于零，波动率的变化对期权价格并没有多少影响，因此交易者可能不会太仔细地研究波动率，因而期权价格中反映出来的隐含波动率可能会有比较大的误差。所以说，在基于同一种股票的期权中，两平期权的价格所隐含的波动率可能更接近于实际情况。因此，利用两平期权的价格计算隐含的波动率是比较好的一种选择，或者，在对从几个期权价格中得出的隐含波动率作平均时，最好给两平期权设定比较高的权重。

9.1-3 红利的影响

在B-S模型中，设定的期权标的资产是在期权有效期内不付红利的股票，但实际情况并不总是这样的。在正常情况下，股票总是会有股利支付的，因此，很多股票期权会碰到在期权到期日之前有红利支付的情况。

股票的分红会影响到股票的价格，导致股票价格的下跌，在市场有效的情况下，如果不考虑税收的影响，股票的分红导致股价下跌的数量应正好等于红利支付

^① 根据B-S模型对股价行为的假设，这里所说的波动率 σ 为常数，所以对不同到期日的期权用的也是相同的波动率。

的数量,股票价格的下跌会导致看涨期权价格的下降,看跌期权价格的上升。B-S 期权定价模型不能直接用于支付红利股票的期权定价,但可以对 B-S 期权定价模型作一定的调整,使之适用于标的股票有分红情况下的期权定价。

由于一般期权的期限不会很长,因此在期权有效期内红利的支付往往可以被比较好地预测到,甚至在某些情况下是可以预知的。

现在我们假定在期权有效期内红利支付的数量和时间都已确定。由于在交易时就已经知道未来红利支付的数量和时间,这样股票的当前价格就可以分解成两部分:第一部分对应于将来可获得的这些红利收入;剩下的部分代表扣除这些红利后该股票的价值。第一部分对应的现金流是确定的,因而是无风险的,将已知红利按照无风险利率贴现到现在的时点上,就是它在当前股价中所占的这一部分。对欧式期权来说,在期权到期日用于交割的显然是支付完股利以后的股票,因此在给期权定价时,我们应该只考虑不包含股利的股票的现价,也就是在股票现价中把对应红利收入的那一部分扣除,剩下的就是一个不付红利的股票了,这时我们就可以用 B-S 期权定价公式来计算期权价格了。

设股票当前价格为 S ,在期权有效期内将要支付的红利的现值为 D ,则实际上对欧式期权而言,其标的股票的当前价值为 $S - D$,因此我们用 $S - D$ 代替 B-S 公式中的股价 S ,即可得出基于已知红利支付的股票的欧式期权的价格。具体公式为:

$$c = (S - D)N(d_1) - e^{-r(T-t)}KN(d_2) \quad (9.5)$$

$$p = e^{-r(T-t)}KN(-d_2) - (S - D)N(-d_1) \quad (9.6)$$

其中,

$$d_1 = \frac{\ln[(S - D)/K] + (r + \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}$$

注意,严格来说,扣除红利现值部分的股价的波动率与实际股价的波动率并不是同一个概念,它们可能并不完全相等,但由于红利的数额与股价本身相比一般都比较小,两个波动率的差别不大,往往可以用实际股价的波动率来代替。

例 9.1 设某股票现价 30 元,价格波动率 30%,1 个月和 7 个月以后分别有 2 元的股利发放,考虑以该股票为标的,执行价为 30 元,有效期还有 9 个月的欧式看涨和看跌期权的价格。设此时无风险利率为 6%。

首先我们来计算期权有效期内红利的现值:

$$D = 2 \cdot e^{-6\% \cdot (1/12)} + 2 \cdot e^{-6\% \cdot (7/12)} = 3.9212$$

再由 $S = 30$, $K = 30$, $\sigma = 0.3$, $r = 0.06$, $T - t = 9/12 = 0.75$, 可得:

$$d_1 = \frac{\ln[(30 - 3.9212)/30] + (0.06 + 0.3^2/2) \times 0.75}{0.3 \times \sqrt{0.75}} = -0.2360$$

$$d_2 = d_1 - 0.3 \times \sqrt{0.75} = -0.4958$$

查表得：

$$N(d_1) = 0.4044$$

$$N(d_2) = 0.3100$$

$$N(-d_2) = 1 - N(d_2) = 0.6900$$

$$N(-d_1) = 1 - N(d_1) = 0.5956$$

最后，得到期权价格为：

$$c = (30 - 3.9212) \times 0.4044 - e^{-0.06 \times 0.75} \times 30 \times 0.31 = 1.66$$

$$p = e^{-0.06 \times 0.75} \times 30 \times 0.69 - (30 - 3.9212) \times 0.5956 = 4.26$$

前面我们假定股票在某些时点分红，红利预先知道。在理论上，对股票红利的支付可以有另一种假设：假定红利随时间连续支付，但红利率为一已知常数，记为 a 。下面我们考虑在这种情况下，以这种股票为标的的期权的定价。

连续红利的概念与连续复利的概念相似，此时的红利率相当于复利率。根据连续复利的计算公式，我们知道，如果在 t 时刻以 V_t 进行投资，按连续复利率 r 计算，到 T 时刻，投资总额增长到 V_T ，则

$$V_T = V_t e^{r(T-t)} \quad (9.7)$$

其中的投资收益，或称利息，为：

$$V_T - V_t = V_t (e^{r(T-t)} - 1) \quad (9.8)$$

将它贴现到 t 时刻，即为利息的现值，用 D 表示：

$$D = e^{-r(T-t)} V_t (e^{r(T-t)} - 1) = (1 - e^{-r(T-t)}) V_t \quad (9.9)$$

可见，如果在当前 t 时刻投资在股价为 S 的股票上，该股票以红利率 a 支付连续红利，则到 T 时刻止，从该股票上获得的股利的现值应为：

$$D = (1 - e^{-a(T-t)}) S \quad (9.10)$$

可得：

$$S - D = S e^{-a(T-t)} \quad (9.11)$$

将(9.11)式代入(9.5)和(9.6)式，即可得到基于以连续红利率 a 支付股利的股票的欧式看涨和看跌期权的B-S定价公式：

$$c = e^{-a(T-t)} S N(d_1) - e^{-r(T-t)} K N(d_2) \quad (9.12)$$

$$p = e^{-r(T-t)} K N(-d_2) - e^{-a(T-t)} S N(-d_1) \quad (9.13)$$

$$\text{其中, } d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r - a + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

9.2 美式期权

到目前为止,我们讨论的都是欧式期权的定价。但事实上,在期权交易所交易的股票期权,很多都是美式期权。因此,美式期权的定价在实践中也是非常重要的。与欧式期权相比,美式期权具有可以提前执行的特点,因此它的定价比欧式期权要复杂一些。

9.2-1 无红利支付股票的美式看涨期权

B-S 公式的基本形式适用于不付红利股票的欧式看涨期权。美式看涨期权与欧式看涨期权相比,唯一的差别是美式期权可以提前执行。我们在上一章的讨论中,已经证明对不付红利的股票,美式看涨期权的提前执行是不明智的,因此,它与相应的欧式看涨期权应具有同样的价值,可以直接套用基本的 B-S 公式,即:

$$C = SN(d_1) - e^{-r(T-t)}KN(d_2) \quad (9.14)$$

其中, $d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$

$$d_2 = \frac{\ln(S/K) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

9.2-2 无红利支付股票的美式看跌期权

对于美式看跌期权,即使它的标的资产是不付红利的股票,在某些时候,提前执行依然是聪明的选择。由于它比欧式期权多一个提前执行的机会,因此,我们可以判断它的价格应比相应的欧式期权高,只是我们无法直接用 B-S 公式来对美式看跌期权进行定价。在欧式期权中可以用来从看涨期权价格求看跌期权价格的平价关系,对美式期权而言,看涨和看跌期权价格的关系只是一个不等式,也没有办法直接用。

幸好我们还有一个二叉树模型,可以用于对期权进行定价。下面我们以一个二期的二叉树为例,介绍利用二叉树模型对美式看跌期权的定价方法。

图 9.1 与我们前面讨论如何利用二叉树模型对欧式期权进行定价时用的二叉树(见图 8.3)完全一样,只不过用 P 表示美式看跌期权的价格,同时,为了避免混淆,这里用 q 表示在每个周期股价上升的概率。注意,在当时,我们并没有具体设定二叉树的参数 u 、 d 和 q 。为了把这些参数同股票的期望收益率和波动率联系起来,我们可以像在上一章中一样,取:

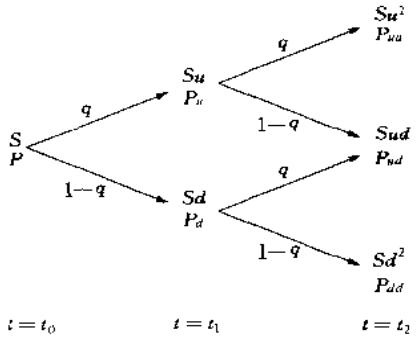


图 9.1 二叉树模型对美式看跌期权定价示意图

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, d = 1/u = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}, q = \frac{1}{2} + \frac{\mu - r}{2\sigma}\sqrt{\Delta t}$$

由于在风险中性世界中,所有资产的预期收益率都是无风险利率,任何资产的均衡定价都可以通过对未来预期价值以无风险利率贴现得到,而且,将最后结果直接放回真实世界中就能获得有意义的结果。为了使定价过程比较简单一些,我们考虑将上述二叉树放在风险中性世界中考虑,也就是说,要满足在每一个周期中,股票价格的期望收益率为无风险利率,于是二叉树中的参数 q 应取为:

$$q = (e^{r\Delta t} - d)/(u - d) \quad (9.15)$$

有了具体的参数以后,股价的二叉树模型就确定了,然后就可以在此基础上沿二叉树倒推来对期权进行定价了。我们先看在 $t = t_2$ 时刻,此时期权已到期,因此,其到期价值很容易确定:

$$P_{uu} = \max(K - Su^2, 0)$$

$$P_{ud} = \max(K - Sud, 0)$$

$$P_{dd} = \max(K - Sd^2, 0)$$

然后再看 $t = t_1$ 时刻,我们知道,如果是欧式期权的话,在风险中性世界中,将它未来可能价值的期望值按无风险利率贴现就等于它现在的价值,我们借用欧式期权价格的符号,表示为:

$$p_u = e^{-r\Delta t}[qP_{uu} + (1 - q)P_{ud}] \quad (9.16)$$

$$p_d = e^{-r\Delta t}[qP_{ud} + (1 - q)P_{dd}] \quad (9.17)$$

注意,这里只是借用欧式期权价格的符号,并不是欧式期权的价格,上面式子表示的意思是将美式期权继续持有到下一期的话,该美式期权在当期应有的价值。但我们知道,美式期权是可以提前执行的,是不是提前执行取决于是提前执行更有利还是继续持有更有利。因此在 $t = t_1$ 时刻,美式期权的价格应等于:

$$P_u = \max(K - Su, p_u) = \max(K - Su, e^{-r\Delta}[qP_{uu} + (1-q)P_{ud}]) \quad (9.18)$$

$$P_d = \max(K - Sd, p_d) = \max(K - Sd, e^{-r\Delta}[qP_{ud} + (1-q)P_{dd}]) \quad (9.19)$$

同样,在 $t = t_0$ 时刻,美式看跌期权的价格应等于:

$$P = \max(K - S, e^{-r\Delta}[qP_u + (1-q)P_d]) \quad (9.20)$$

这便是在二期二叉树模型下,美式看跌期权的定价过程。

对 n 期二叉树,如果我们用 $S_{i,j} = Su^i d^j$ 表示在二叉树中经过 i 期上升 j 期下降后的某个节点的股价,用 $P_{i,j}$ 表示在该节点上美式看跌期权的价格,则

$$P_{i,j} = \max(K - S_{i,j}, e^{-r\Delta}[qP_{i+1,j} + (1-q)P_{i,j+1}]) \quad (9.21)$$

当 $i+j = n$ 时, $P_{i,j} = \max(K - S_{i,j}, 0)$ 。

然后沿二叉树倒推,一直到初始时刻,即第 0 期的 $P_{0,0}$ 就是我们要求的美式看跌期权的价格。遗憾的是,对美式看跌期权,由于在倒推过程中,在每个节点要考虑是否提前执行,我们没有办法从股价的最后分布直接得出初始时刻的期权价,也就无法像对欧式期权那样,通过让 n 趋向无穷大得出一个像 B-S 公式那样的解析结果。

例 9.2 某股票现价 30 元,价格波动率为 30%,未来 3 个月内无红利支付,求以该股票为标的,执行价为 30 元,有效期还有 3 个月的美式看跌期权的价格。设此时的无风险利率为 6%。

首先,我们要构造一个二叉树,为了简单起见,我们以 1 个月为一周期,即构造一个 3 期的二叉树, $n = 3$, $\Delta t = 1/12$ 。然后计算二叉树的参数:

$$u = e^{r\sqrt{\Delta t}} = e^{0.06 \times \sqrt{1/12}} = 1.090$$

$$d = e^{-0.06 \times \sqrt{1/12}} = 0.917$$

$$q = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = \frac{e^{0.06 \times 1/12} - 0.917}{1.090 - 0.917} = 0.5087$$

$$1 - q = 0.4913$$

$$e^{-r\Delta t} = e^{-0.06/12} = 0.995$$

有了这些参数,我们就可以计算二叉树上每一个节点的股价,我们得到:

$$\begin{array}{llll} S_{0,0} = 30 & S_{1,0} = 32.714 & S_{2,0} = 35.673 & S_{3,0} = 38.900 \\ S_{0,1} = 27.511 & S_{1,1} = 30 & S_{2,1} = 32.714 & \\ S_{0,2} = 25.229 & & S_{1,2} = 27.511 & \\ S_{0,3} = 23.136 & & & \end{array}$$

然后,我们有:

$$P_{3,0} = 0, \quad P_{2,1} = 0, \quad P_{1,2} = 2.489, \quad P_{0,3} = 6.864$$

再沿二叉树倒推，可得：

$$P_{2,0} = \max(0, e^{-r\Delta}[qP_{3,0} + (1-q)P_{2,1}]) = 0$$

$$P_{1,1} = \max(0, e^{-r\Delta}[qP_{2,1} + (1-q)P_{1,2}])$$

$$= 0.995 \times 0.4913 \times 2.489 = 1.217$$

$$P_{0,2} = \max(4.771, e^{-r\Delta}[qP_{1,2} + (1-q)P_{0,3}])$$

$$= \max[4.771, 0.995 \times (0.5087 \times 2.489 + 0.4913 \times 6.864)]$$

$$= 4.771$$

$$P_{1,0} = \max(0, e^{-r\Delta}[qP_{2,0} + (1-q)P_{1,1}]) = 0.995 \times 0.4913 \times 1.217$$

$$= 0.595$$

$$P_{0,1} = \max(2.489, e^{-r\Delta}[qP_{1,1} + (1-q)P_{0,2}])$$

$$= \max[2.489, 0.995 \times (0.5087 \times 1.217 + 0.4913 \times 4.771)]$$

$$= 2.948$$

最后得到：

$$P = P_{0,0} = \max(0, e^{-r\Delta}[qP_{1,0} + (1-q)P_{0,1}])$$

$$= 0.995 \times (0.5087 \times 0.595 + 0.4913 \times 2.948) = 1.742$$

即该美式看跌期权的价格应为 1.742 元。

在本例中，为了简单起见，我们把每一周期的长度设为 1 个月，相当于实际情况，应该说是十分粗糙的，因此其结果的可靠性也不是很高。为了得到更好的结果，应该缩短每一周期的时间长度，即二叉树的期数 n 要取更大的值。但我们可以看到，如果手工做的话，当 n 比较大的时候，沿二叉树倒推的工作量是很大的，而且容易出错，比较好的办法是借助计算机编程来完成上述工作。

9.2-3 有红利支付股票的美式期权

根据我们在上一章的讨论，对于基于有红利支付的股票的美式期权，有提前执行的可能，因此 B-S 公式无法使用。对于这种期权，我们同样可以用二叉树方法来进行定价。下面我们以美式看涨期权为例讨论有红利支付股票的美式期权的二叉树方法定价过程。

定价过程的第一步仍然是构造一个二叉树，但由于红利的支付会引起股价的下降，此时股价的二叉树与不付红利时的有所不同。

如果红利按连续红利率 a 支付，那么在风险中性世界中，股价按连续复利率 $r-a$ 增长，此时股价的二叉树与不付红利时的相差不大，只要用：

$$q = \frac{e^{(r-a)\Delta} - d}{u - d} \quad (9.22)$$

作为每一周期中股价上升的概率即可。

如果已知红利在某一时刻按固定数额支付,那么在股价的二叉树中,处于该时刻的每个节点的股价下降一个固定数额,例如,在二叉树的第 m 期支付股利 D_m ,那么在二叉树中第 m 期节点的股价 $S_{i,j}$ ($i+j=m$) 将发生如下变化:

$$S_{i,j} = Su^i d^j \rightarrow S_{i,j}^* = Su^i d^j - D_m \quad i+j=m \quad (9.23)$$

其后的股价将在 $S_{i,j}^*$ 的基础上按 u 或 d 的比例上升下降。但这会引出一个问题,即 m 期以后的节点将不再重合。假设在第 1 期期末发放股利,则第 1 期期末的两个节点的股价发生如下变化:

$$Su \rightarrow Su - D_m$$

$$Sd \rightarrow Sd - D_m$$

到了第 2 期,股价在第 1 期的基础上演变:

$$\begin{aligned} Su - D_m &\rightarrow \begin{cases} (Su - D_m)u = Su^2 - D_m u \\ (Su - D_m)d = Sud - D_m d \end{cases} \\ Sd - D_m &\rightarrow \begin{cases} (Sd - D_m)u = Sud - D_m u \\ (Sd - D_m)d = Sd^2 - D_m d \end{cases} \end{aligned}$$

上面一个节点经一期下降与下面一个节点经一期上升得到的股价不再重合。从而给二叉树的描述和计算带来麻烦。为了解决这一问题,我们考虑将当前的股价分为两部分:一部分对应已知的股利,剩下的是纯粹的股票价格,但应注意,与欧式期权不同,美式期权不能认为是仅仅依赖于剩下部分的股票价格的,因为如果在发放红利前执行的话,交易的是含股利的股票。

如果我们用 S^* 表示不含股利的纯粹的股票价格,按 S^* 构造二叉树,则为:

$$S_{i,j}^* = S_{0,0}^* \cdot u^i d^j \quad (9.24)$$

严格地说, S 的波动率与 S^* 的波动率并不完全相同,但由于红利的数额与股价本身相比一般都比较小,两个波动率的差别不大,往往可以用 S 的波动率来代替 S^* 的波动率。因此我们就可以得到在风险中性世界中关于 S^* 的一个二叉树,在这个二叉树中,每一期的节点数只比上一期多一个,也就是说,上面一个节点经一期下降与下面一个节点经一期上升得到的股价是重合的。每个节点的股价 $S_{i,j}^*$ 可以比较方便地表示出来。

由于我们对美式期权的定价要在完整股价的二叉树上进行,因此要把关于 S^* 的二叉树再转变为关于 S 的二叉树。如果我们以 D 表示股利的现值(设期权有效期内仅在第 m 期发放数额为 D_m 的股利),则

$$D = D_m e^{-r_m \Delta t} \quad (9.25)$$

$$S_{0,0}^* = S - D \quad (9.26)$$

$$S_{i,j} = \begin{cases} S_{i,j}^* + De^{r(i+j)\Delta} = (S - D)ud^j + De^{r(i+j)\Delta} & \text{如果 } i+j \leq m \\ S_{i,j}^* = (S - D)ud^j & \text{其余情况下} \end{cases} \quad (9.27)$$

有了股票价格的二叉树模型后,仿照上面对不付红利股票美式看跌期权的定价方法,可以从二叉树的末端沿二叉树倒推得到有红利支付的美式看涨期权的定价,对 n 期的二叉树模型,具体公式为:

$$C_{i,j} = \begin{cases} \max(S_{i,j} - K, 0) & \text{如果 } i+j = n \\ \max(S_{i,j} - K, e^{-r\Delta}[qC_{i+1,j} + (1-q)C_{i,j+1}]) & \text{如果 } i+j < n \end{cases} \quad (9.28)$$

从 $i+j = n$ 的节点逐级倒推,到 $C_{0,0}$ 即为美式看涨期权交易时的价格。

对有红利支付的美式看跌期权,可以用相似的方法构造股价二叉树。但有一点要注意,在有股利发放的第 m 期,看涨期权如果执行的话,一定是在股利发放前,因此考虑的是股利发放前的股价;而看跌期权如果执行的话,一定是在股利发放后,因此考虑的是股利发放后的股价,即上面(9.27)式应修改为:

$$S_{i,j} = \begin{cases} S_{i,j}^* + De^{r(i+j)\Delta} = (S - D)ud^j + De^{r(i+j)\Delta} & \text{如果 } i+j < m \\ S_{i,j}^* = (S - D)ud^j & \text{其余情况下} \end{cases} \quad (9.29)$$

逐级倒推的公式为:

$$P_{i,j} = \begin{cases} \max(K - S_{i,j}, 0) & \text{如果 } i+j = n \\ \max(K - S_{i,j}, e^{-r\Delta}[qP_{i+1,j} + (1-q)P_{i,j+1}]) & \text{如果 } i+j < n \end{cases} \quad (9.30)$$

例 9.3 某股票现价 30 元,价格波动率为 30%,两个月后支付红利 2 元,求以该股票为标的,执行价为 30 元,有效期还有 3 个月的美式看跌期权的价格。设此时的无风险利率为 6%。

除有红利支付外,本例与例 9.2 的条件相同,我们直接写出有关参数: $n = 3$, $m = 2$, $\Delta t = 1/12$, $u = 1.090$, $d = 0.917$, $q = 0.5087$, $1-q = 0.4913$, $e^{r\Delta} = 1.005$, $e^{-r\Delta} = 0.995$ 。

股利的现值为:

$$D = 2 \times e^{-0.06 \times 2 \times 1/12} = 1.980$$

$$S_{0,0}^* = 30 - 1.980 = 28.020$$

按(9.24)和(9.29)式计算二叉树上每一个节点的股价,得到:

$$\begin{array}{llll} S_{0,0} = 30 & S_{1,0} = 32.545 & S_{2,0} = 33.319 & S_{3,0} = 36.333 \\ S_{0,1} = 27.685 & S_{1,1} = 28.02 & S_{2,1} = 30.555 & \\ S_{0,2} = 23.564 & S_{1,2} = 25.696 & & \\ S_{0,3} = 21.609 & & & \end{array}$$

然后,我们有:

$$P_{3,0} = 0, P_{2,1} = 0, P_{1,2} = 4.304, P_{0,3} = 8.391$$

再沿二叉树倒推,可得:

$$P_{2,0} = \max(0, e^{-r\Delta}[qP_{3,0} + (1-q)P_{2,1}]) = 0$$

$$\begin{aligned} P_{1,1} &= \max(0, e^{-r\Delta}[qP_{2,1} + (1-q)P_{1,2}]) \\ &= 0.995 \times 0.4913 \times 4.304 = 2.104 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{1,2} &= \max(6.436, e^{-r\Delta}[qP_{1,1} + (1-q)P_{0,3}]) \\ &= \max[6.436, 0.995 \times (0.5087 \times 2.104 + 0.4913 \times 8.391)] \\ &= 6.436 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{1,0} &= \max(0, e^{-r\Delta}[qP_{2,0} + (1-q)P_{1,1}]) \\ &= 0.995 \times 0.4913 \times 2.104 = 1.029 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{0,1} &= \max(2.315, e^{-r\Delta}[qP_{1,1} + (1-q)P_{0,2}]) \\ &= \max[2.315, 0.995 \times (0.5087 \times 1.029 + 0.4913 \times 6.436)] \\ &= 4.211 \end{aligned}$$

最后得到:

$$\begin{aligned} P &= P_{0,0} = \max(0, e^{-r\Delta}[qP_{1,0} + (1-q)P_{0,1}]) \\ &= 0.995 \times (0.5087 \times 1.029 + 0.4913 \times 4.211) = 2.579 \end{aligned}$$

即该美式看跌期权的价格应为 2.579 元。由于红利的支付,该看跌期权的价格高于相应的无红利支付股票的看跌期权的价格。

9.3 期权的套期保值

9.3-1 期权的风险

期权作为一种独特的金融工具,在金融风险管理等方面具有重要的作用。但是不可否认,期权交易给投资者带来的收益(或亏损)是不确定的。尤其是对期权的空头方而言,当它取得期权费的收入以后,就承担了为对方提供保险的义务,当期权标的商品的价格朝不利方向变动的时候,可能会遭受很大的损失。因此说,期权的交易者也面临很大的风险。

例如,设某股票当前价 30 元,以该股票为标的,3 个月后到期,执行价为 30 的欧式看涨期权价格为 2 元。考虑一个拥有 30 万元资金的投资者,他直接投资股票的话,可以买 1 万股,如果购买看涨期权的话,可以买标的为 15 万股股票的期权。

假如到期时股价的可能范围为 25 到 40 元,那么我们可以看到,如果投资股票的话,投资收益的可能范围在 -5 万元到 +10 万元之间,而如果投资期权的话,投资收益在 -30 万到 +120 万元之间。可见投资期权,尽管其期望收益可能比投资股票高^①,但是其收益的不稳定性远远高于投资股票的情况。而对期权的出售一方来说,如果他出售了标的为 15 万股股票的期权,其到期盈亏在 +30 万到 -120 万元之间,如果到期股价的可能范围更大的话,其最大盈利仍为 30 万元,而最大亏损则可超过 120 万元。可见期权的出售方面面临更大的风险。

一般来说,在期权的交易中,银行等金融机构往往是期权的出售者,它们对客户提供保险,尤其是在场外交易(OTC)中,金融机构根据客户的要求定制非标准化的期权,这种非标准化的期权合约的空头头寸往往会使金融机构面临巨大的风险。这种空头头寸无法通过在期权交易所购买相应的期权合约来对冲。金融机构必须采取措施对它面临的风险进行管理,或者说对持有的期权头寸进行套期保值。

下面我们仍以股票期权为例,讨论金融机构如何对其持有的期权头寸进行套期保值。

9.3-2 简单策略

我们考虑上面例子中出售了标的为 15 万股股票的看涨期权的金融机构。金融机构发现,它收取的期权费为 30 万元,但是当到期时股票价格超过 40 元时,它为了履约所要支付的金额将超过 150 万元,可见股票价格上升对它来说是一个不利的变化。一个十分自然的想法是为了抵消股票价格上升带来的损失,在卖出期权的同时买入股票,作为保险,该策略称为抵补期权头寸策略(covered position)。例如买回 15 万股股票,这样,当对方要求执行期权时,可以以手中的股票用于交割,而不用考虑到期时股票的市场价格有多高。

这一策略实际上我们在第 7 章中已经介绍过,即一个股票多头加一个看涨期权空头。从其到期损益图(见图 7.2)看,该策略的结果与一个看跌期权空头十分相似。也就是说,采用该策略以后,金融机构相当于出售了标的为 15 万股股票的看跌期权。这时我们发现,股票价格上升可能给金融机构带来损失的问题解决了,但新的问题产生了:股票价格的下跌将给它带来损失,例如当到期时股票价格跌到低于 25 元时,尽管它在期权上的头寸不需要履约,30 万元的期权费可全部作为收入,但是在股票交易中,当初以每股 30 元的价格购买的 15 万股股票,到期价低于每股 25 元,因此损失超过 75 万元。

可见,抵补期权头寸策略在套期保值中效果并不好,它仅仅是把一个看涨期权空头头寸转换成了一个看跌期权空头头寸。

另一种策略称为止损策略(stop-loss strategy),其基本思路是:出售了一个看

^① 由于我们没有到期时股价的概率分布,因此不能简单地认为投资股票的期望收益为 2.5 万元,而投资期权的期望收益为 4.5 万元。

涨期权以后,随时变换手中持有的股票头寸,当股票价格高于执行价时就持有股票,当股票价格低于执行价时就不持有股票(见图 9.2)。

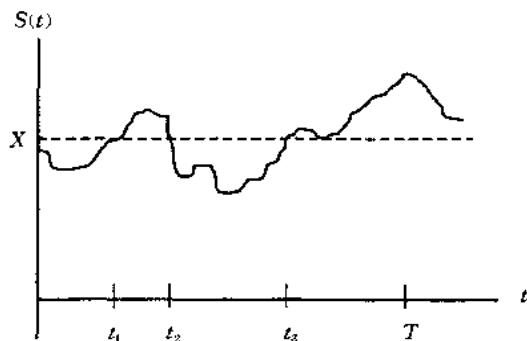


图 9.2 止损策略示意图

按图 9.2 所示,在 t_1 时刻,股价超过执行价,则买入股票;到 t_2 时刻,股价低于执行价,则卖出股票;到 t_3 时刻,股价又超过执行价,则再买入股票;到 T 时刻,即期权到期时,股价高于执行价,手中有股票可用于交割。按照上述操作思路,我们知道,若一开始股价 S 高于执行价 K ,则第一次购买股票的购买价为 S ,以后每一次买卖价均为 K ,而若一开始股价 S 低于执行价 K ,则每一次买卖价均为 K ,而且在期权到期时,如果要进行交割的话,也是以 K 的价格将股票卖出。可见,采用该策略,在股票现货的操作中,最终的效果是按当前股价 S (如果 $S > K$) 或按执行价 K (如果 $S < K$) 买入股票,最后按执行价 K 卖出股票。也就是说,为了保证有能力履约,出售看涨期权一方采用止损策略在股票现货操作中的总成本为:

$$\max(S - K, 0)$$

而我们前面讨论过股票期权的价格范围,知道看涨期权的价格 c 一定大于 $\max(S - K, 0)$,因此期权出售方一定能够盈利,上述止损策略看起来非常成功。

例如上述金融机构,在出售了看涨期权以后,就随时关注股票的市场价格,一旦股价超过 30 元,就买入 15 万股股票,而一旦股价低于 30 元,就将手中的股票出售。这样就保证在到期时,若股价低于 30 元,不需要履约时,则手中没有股票;而若股票市场价高于 30 元,则手中有股票,可将手中股票用于交割,理想中购买股票的成本为每股 30 元。这样,不管到期时的股价是多少,金融机构为履约所花的成本为零,它可以成功地净收入 30 万元期权费。

然而,现实世界上毕竟没有这么好的事情,让你可以按大于零的价格出售一个可以以零成本履约的期权。事实上,如果 B-S 模型正确的话,从统计结果看,金融机构为了履约所要支付的成本应等于 B-S 公式的计算结果。那么上述止损策略的问题到底出在哪里呢?如果我们真的要实施该策略的话,我们就会发现:

- (1) 现金流发生在不同时刻,需要贴现。
- (2) 有交易费用(在买卖股票时发生的),如果股价在执行价附近频繁波动的话,就会有很多次的交易发生。

(3) 买入和卖出股票的价格不可能完全相等。

问题(1)和(2)在某些情况下可能还没有太大影响,比如当利率接近零的时候,贴现与不贴现的值相差很小,可以忽略不计,而作为金融机构,它买卖股票的交易费用率也可能很低,也可以忽略不计。但是问题(3)则是不可避免的,理由是,当股票价格刚好到达执行价时,投资者并不知道下一刻它会上涨还是下跌,因此无法决定是否要采取措施,即是否要购买或出售股票。所以即使投资者每时每刻都在观测股价的变化,他也要等股价略微超出执行价,即 $S = K + \delta$ (δ 为一比较小的数值)时才能买入股票;同样,出售股票的决策也要等到股价略微低于执行价,即 $S = K - \delta$ 时才能作出。这样一进一出,在每一股股票上就损失 2δ 。在上述例子中,金融机构每一次要买卖 15 万股股票,如果取 $\delta = 0.1$ 元,则每买卖一轮,金融机构就将付出 3 万元的成本,这样,如果在 3 个月的期权有效期内,根据股价的变动,金融机构需要在股票市场上进出 10 次的话,就要花费 30 万元的成本。那么 δ 的取值是否越小越好呢? δ 越小,则每次买卖付出的成本就越小,但同时发生交易的机会就越多,这一因素会引起交易总成本的上升。如上例,若取 $\delta = 0.05$ 元,则每买卖一轮,金融机构只需付出 1.5 万元的成本,但是在这 3 个月中,它可能就需要在股票市场上进出 15 次、20 次甚至 30 次,其总成本将达到 22.5 万元、30 万元甚至 45 万元。事实上,在采用止损策略的实际操作中,投资者并非每时每刻紧盯着股票的市场价格,一般可采取每隔一段时间观测一次的办法,若发现股价已超出执行价,则买入股票,若股价已低于执行价,则卖出股票。观测的间隔时间短近似相当于 δ 的取值比较小,间隔时间长近似相当于 δ 的取值比较大。

止损策略对期权空头头寸的保值有一定的效果,当然,它也有一定的成本,这是合理的。但是它的保值效果并不十分理想,尤其是当股票价格在执行价附近频繁波动时,保值成本会非常大。

下面将介绍比上述方法更复杂的保值策略。

9.3-3 Delta 套期保值

对于需要对期权头寸进行保值的套期保值者来说,一个关键的地方是要明白有哪些因素会影响自己手中期权头寸的价值。对于股票期权来说,股票价格的变化是影响期权价值的一个重要因素,因此期权的交易者可能十分关心期权价格随股票价格的变动情况。

一种衍生证券的 Delta 就定义为该衍生证券的价格变化对其标的资产价格变化的比率。对于一个以股票为标的的衍生证券,若其价格用 f 表示,则其 Delta 表示为:

$$\Delta = \frac{df}{dS} \quad (9.31)$$

在一段比较短的时间内,股价变化 ΔS 很小的时候,也可近似为:

$$\Delta = \frac{\Delta f}{\Delta S} \quad (9.32)$$

对于一股标的股票本身,按照定义,其 Delta 等于 1。

假设有两种基于同一种股票的衍生证券,它们的价格分别用 f_1 和 f_2 表示,它们的 Delta 分别记为 Δ_1 和 Δ_2 。现在我们考虑这两种衍生证券的一个组合,它由 α_1 份第一种衍生证券和 α_2 份第二种衍生证券组成,组合的价值记为 P ,其 Delta 记为 Δ_P ,则

$$P = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \quad (9.33)$$

$$\Delta_P = \frac{\Delta P}{\Delta S} = \frac{\alpha_1 \Delta f_1 + \alpha_2 \Delta f_2}{\Delta S} = \alpha_1 \Delta_1 + \alpha_2 \Delta_2 \quad (9.34)$$

可见组合的 Delta 值是构成组合的证券的 Delta 值的累加。

按照 Delta 的定义,它实际上是衍生证券(组合)价格对标的资产价格的敏感度,如果 Delta 等于零,则衍生证券(组合)的价格不随标的资产价格而变。因此如果我们能构造一个组合,使它的 Delta 等于零,那么该组合的价值就不会随标的资产价格而变,从而达到套期保值的目的。这种构造一个 Delta 等于零的组合的方法,称为 Delta 套期保值。

例如,以某股票为标的资产的一种衍生证券,其 Delta 记为 Δ ,对一份该衍生证券的空头头寸,购入 Δ 份标的股票,则整个头寸的 Delta 为零。整个头寸的价值将不随标的股票的价格而变。

对于我们前面讨论的出售了一个欧式看涨期权的金融机构来说,要采用 Delta 套期保值的方法,就需要知道它出售的期权的 Delta 值,然后购入 Δ 份股票即可。对于不付红利的股票的欧式看涨期权,B-S 公式给出了一个解析的定价公式,因此利用 B-S 公式可以得到其 Delta 值的解析表达式:

$$\Delta_c = \frac{dc}{dS} = N(d_1) \quad (9.35)$$

其中,

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

$\Delta_c > 0$,对于一份看涨期权空头来说,相当于卖出一份期权,因此根据 Delta 套期保值的策略,对卖出的每一份以一股股票为标的的期权,应买入 $N(d_1)$ 份股票,而对于一份以 15 万股股票为标的的看涨期权的空头,应买入 $N(d_1) \times 15$ 万股股票作为套期保值,而不是像在抵补头寸策略或止损策略中那样按 1:1 的比例进行。

而欧式看跌期权的 Delta 值的表达式为:

$$\Delta_p = \frac{dp}{dS} = -N(-d_1) = N(d_1) - 1 \quad (9.36)$$

$\Delta_p < 0$,因此对于一份看跌期权空头来说,如果要做 Delta 套期保值的话,应卖出

$| N(d_1) - 1 |$ 份股票。

采用 Delta 套期保值策略的时候要注意,对于绝大多数的衍生证券,Delta 值不是常数,它仍然是标的资产价格和其他变量的函数,随着时间的推移,各变量的变化,Delta 值也在变化。因此上述构造 Delta 等于零的套期保值组合的方法只在很短的时间内有效,随着时间的变化,如果不调整组合的比例的话,组合的 Delta 将不等于零。为了在整个期权的有效期内做到套期保值,必须经常按照 Delta 值的变化调整组合的比例,即调整所持有的股票的数量。

实验表明,Delta 套期保值的效果比止损策略有很大的改进,按照 Delta 值的变化调整组合的比例的次数越多,越频繁,则套期保值效果的稳定性就越高。

9.3-4 其他套期保值参数

事实上,影响衍生证券价格的因素并不仅仅是标的资产的价格。下面我们继续以基于不付红利股票的欧式看涨期权为例进行讨论。

以 c 表示看涨期权的价格,它由股价 S 、股价波动率 σ 、执行价 K 、离到期的时间距离 $T-t$ 、无风险利率 r 等因素决定,其中, K 和 T 是确定的常数, S 、 σ 、 t 、 r 是变量,我们可将期权价格的变化作如下展开:

$$\Delta c = \frac{\partial c}{\partial S} \Delta S + \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} (\Delta S)^2 + \frac{\partial c}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial c}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial c}{\partial \sigma} \Delta \sigma \quad (9.37)$$

因为 ΔS 一般比较大,保留其二次项,其余保留一次项。

通过重新定义,上式可改写为:

$$\Delta c = \Delta \cdot \Delta S + \Gamma \cdot (\Delta S)^2 + \Theta \cdot \Delta t + \rho \cdot \Delta r + \gamma \cdot \Delta \sigma \quad (9.38)$$

其中 Delta, 即 $\Delta = \frac{\partial c}{\partial S}$ 在上面已讨论过。下面我们讨论其他几个参数: Γ 、 Θ 、 ρ 和 γ 。

(1) Gamma(Γ)。

根据定义,

$$\Gamma = \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} = \frac{\partial \Delta}{\partial S} \quad (9.39)$$

也就是说,Gamma 是 Delta 的变化相对于股票价格变化的比率。对股票本身来说,其 Delta 等于常数,因此其 Gamma 等于零。对于期权,上面我们提到,当 S 变化的时候,Delta 也会变化,因此采用 Delta 套期保值的方法只能在很短的时间内使 Delta 值为零的组合价值不随 S 的变化而变化;而当 Gamma 接近或等于零的时候,由于 Delta 随 S 的变化很慢,因而,即使 S 变化,组合的 Delta 仍可保持基本不变。这样,采用 Delta 套期保值的组合价值就可以在 S 比较大的变动范围内保持不变了,从而达到更好的保值效果。也就是说,如果一个组合能同时做到 Delta 中性和 Gamma 中性(即组合的 Delta 和 Gamma 都等于零),它的保值效果应优于单纯的 Delta 套期保值。

根据 B-S 公式,我们可以得到不付红利股票的欧式看涨期权 c 和看跌期权 p 的 Gamma 的表达式:

$$\Gamma_c = \frac{\partial \Delta_c}{\partial S} = \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}} \quad (9.40)$$

$$\Gamma_p = \frac{\partial \Delta_p}{\partial S} = \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}} = \Gamma_c \quad (9.41)$$

看涨期权和看跌期权的 Gamma 值相同,均大于零。这意味着,如果要对一个看涨期权空头作 Delta 和 Gamma 均为中性的套期保值的话,很可能需要用看跌期权的多头和股票头寸一起来做组合才行。

(2) Theta(Θ)。

根据定义,

$$\Theta = \frac{\partial c}{\partial t} \quad (9.42)$$

它是衍生证券(如期权)的价值变化相对于时间变化的比率。

按照 B-S 公式,我们可以得到不付红利股票的欧式看涨期权 c 和看跌期权 p 的 Theta 的表达式:

$$\Theta_c = -\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} - rKe^{-r(T-t)}N(d_2) \quad (9.43)$$

$$\Theta_p = -\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} + rKe^{-r(T-t)}N(-d_2) \quad (9.44)$$

一般来说,单个期权的 Theta 值几乎总是为负的^①,也就是说,随着时间的推移,期权的价值会越来越小。

如果构成一个组合的话,组合的 Theta 可能为正,也可能为负,甚至为零。但是我们并不需要构造一个 Theta 为零的组合进行保值,这一点与 Delta 及 Gamma 不同,Delta 及 Gamma 对应于股价的变化,具有不确定性,而 Theta 对应于时间的推移,这是确定要发生的,并没有不确定性存在,因此我们会希望组合的 Theta 越大越好,这样随着时间的推移,若其他条件都不变的话,组合的价值就会增大。事实上,如果构造一个无风险组合的话,在理论上,组合的 Theta 值应等于组合价值按无风险利率增加时的增长率^②。

(3) Vega(γ)。

根据定义,

$$\gamma = \frac{\partial c}{\partial \sigma} \quad (9.45)$$

^① 也有例外情况,比如当 $K \gg S$ 时,欧式看跌期权的 Theta 为正。

^② 如果无风险组合价值为 1 的话,其 Theta 值就等于无风险利率。

它是衍生证券(如期权)的价值变化相对于资产价格波动率变化的比率。

根据 B-S 公式,期权的价格依赖于标的股票价格的波动率,如果能构造一个组合,使组合的 Vega 值为零,则波动率的变化将不再影响组合的价值。我们知道,对标的股票的波动率的准确估计是一件比较困难的事情,因而如果组合的 Vega 接近于零,则可在一定程度上消除由于波动率的估计不准而带来的影响。但这也是比较困难的,只能做到近似而已,因为 Vega 本身也是波动率的函数。根据 B-S 公式,对于不付红利股票的欧式看涨和看跌期权,它们的 Vega 值为:

$$\gamma = S\sqrt{T-t}N'(d_1) \quad (9.46)$$

(4) Rho(ρ)。

根据定义,

$$\rho = \frac{\partial C}{\partial r} \quad (9.47)$$

它是衍生证券(如期权)的价值变化相对于无风险利率变化的比率,反映了其价值对利率的敏感性。

按照 B-S 公式,对于不付红利股票的欧式看涨期权和欧式看跌期权,有:

$$\rho_c = (T-t)Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \quad (9.48)$$

$$\rho_p = -(T-t)Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) \quad (9.49)$$

若能做到使组合的 Rho 为零,则组合的价值不受利率少许变化的影响。

根据上面的讨论,除了 Theta 以外,如果我们能构造一个组合,使组合的其他参数(包括 Δ 、 Γ 、 γ 和 ρ)都等于零的话,组合的价值将不受股价、波动率、利率等因素变化的影响,达到套期保值的效果。但是,必须注意,这些保值参数的应用只能是在一个比较短的时间内才有效,因为如果时间比较长,这些因素有比较大的变化时,组合的参数值也会变化。因此,要做到比较好的套期保值效果,应经常调整组合比例,使组合处于最佳保值状态。

本章小结

为了要使用 Black-Scholes 公式计算期权的价格,必须通过适当的方法确定股票价格的波动率 σ ,及无风险利率 r 这两个参数。对于无风险利率人们利用具有类似有效期的短期国债的市场价格来确定。而对于股价波动率,一种方法是利用股价的历史数据来估计,另一种方法是利用所谓的隐含波动率。

隐含波动率是指在市场中观测到的期权价格中所蕴含的波动率,即反过来利用 Black-Scholes 公式从期权价格计算得到的波动率。利用从某一个或几个期权价格中得到的隐含波动率可以计算基于同一个股票的其他期权的价格。

Black-Scholes 公式的基本形式是针对不付红利的欧式股票期权的,而事实上许多股票是有红利支付的。为了对有红利支付的欧式股票期权进行定价,必须对

Black-Scholes 公式的基本形式进行修正。

对于美式期权的定价,除了无红利支付股票的美式看涨期权因不会提前执行而与欧式期权相同之外,都因为存在提前执行的可能而无法使用 Black-Scholes 定价公式。我们主要还是利用二叉树模型对美式期权的价格进行估计。

期权作为一种独特的金融工具,在金融风险管理等方面具有重要的作用,但它同时也给投资者带来很大的风险,尤其是期权的空头方,往往要采取一些措施来控制所面临的风险。利用 Black-Scholes 公式对几个影响期权价格因素变量的展开式,我们得到一些关于期权的套期保值参数,包括 Δ 、 Γ 、 Θ 、 ρ 和 γ 等,除了 Θ 之外,它们分别反映了期权价格对一些风险因素的敏感度。如果我们能设法构造组合,使组合的这些参数为零,则表明组合的价值对这些风险不敏感。比如,设法使组合的 Δ 为零,则组合的价值在短时间内不随股价的变化而变化,而这种使组合的 Δ 为零的策略则称为 Delta 套期保值。

复习与思考

- 某金融机构于 3 月 1 日出售了标的为 100 000 股 A 股票的欧式看涨期权,已知 A 股票现价 50 元,期权执行价 45 元,到期日为 8 月 1 日,股价波动率 20%,无风险利率 12%。金融机构采用 Delta 套期保值策略,为了对其期权的空头头寸进行保值,应购买多少股票?若到了 5 月 1 日,股价变为 55 元,金融机构又该如何操作?
- 上题中,如果在市场上有以 A 股票为标的的看跌期权交易,金融机构应如何做套期保值?
- 计算题 1 中看涨期权的 Delta、Gamma,并计算题 2 中执行价为 50 元的看跌期权的 Delta、Gamma。利用执行价为 50 元的看跌期权如何对题 1 中执行价为 45 元的看涨期权进行保值?
- 已知某股票现价 45 元,价格波动率 30%,两个月后支付红利 2 元,求以该股票为标的,执行价为 44 元,有效期还有 3 个月的美式看涨期权的价格。

参考文献

- 吴信如、潘英丽,2000,《金融工程学》,立信会计出版社。
John C. Hull, 2001,《期权、期货和其他衍生品》(第 4 版,英文影印版),清华大学出版社。
John C. Cox and Mark Rubinstein, 2001,《期权市场》(第 3 版,英文影印版),清华大学出版社。

第3篇

期权定价理论
的应用

在

我国,股指期货的推出已经提上了议事日程。作为金融衍生工具中的一大重要组成部分,股指期货和股指期权能大大改变人们的交易方式。通过股指期货和期权的交易,投资者不仅能在股市看涨的情况下获利,在看跌时也能赢利。此外,通过股指期货还可以改变资产配置,改变资产组合的风险。

在本篇中,作为期权定价理论的应用,我们首先介绍股指期货和期权,它们的价值评价和风险度量以及应用。然后我们再介绍外汇期货和期权及其应用。外汇期货和期权也是金融衍生工具中的一个重要组成部分,是从事外汇业务、进行跨国财务管理所必须使用的金融工具。随着世界经济一体化、金融市场全球化的发展趋势,外汇期货和期权的应用也越来越显示出其重要性。

股指期货与期权

10.1 股指期货

10.1-1 股票指数

投资者在投入到股票市场中参与股票交易时,会发现市场上有很多种股票可供交易,每一种股票价格的变动行为各不相同,为了对市场的整体情况有一个把握,希望有一种指标能反映市场的整体运动行为。股票指数就是这样一种指标,它是以某种数学方法求出的,用于反映任何时候股票市场相对水平的一种数字。

股票指数的计算主要有两种方法:

(1) 简单平均。

简单平均就是将构成指数的每一种成分股票的某天的价格求和,除以一个常数,就得出该天的指数值。计算公式为:

$$\text{Index} = \frac{1}{\text{Divisor}} \sum_i P_i \quad (10.1)$$

其中, P_i 是构成指数的第*i*种成分股当时的价格,Divisor是一个除数。

例 10.1 某种按简单平均法计算的指数由 A、B、C 三个股票构成,在 1990 年 1 月 1 日,其股价分别为: $P_A = 10$, $P_B = 15$, $P_C = 25$ 。定义 1990 年 1 月 1 日为基准日,基准日指数定为 100。则由

$$100 = \frac{1}{\text{Divisor}} \times (10 + 15 + 25)$$

得到 $\text{Divisor} = 0.5$ 。

若到 1991 年 1 月 1 日,三个股票的股价分别为: $P_A = 16$, $P_B = 20$, $P_C = 60$ 。则 1991 年 1 月 1 日的指数值为:

$$\text{Index} = \frac{1}{0.5} \times (16 + 20 + 60) = 192$$

股票指数通常不因派发现金股利而调整,也就是说,大部分的指数在计算时,

不考虑股票组合收到的任何现金股利。但是,对于涉及到股票分割的情况,则会对除数作调整,以使指数更好地反映股票市场的实际水平。

例 10.2 在例 10.1 中,C 股票在 1991 年 1 月 1 日进行分割,每一股分割为两股,则股价由 60 降至 30。实际上在分割前后,股票市场的价格水平应该说没有变化,但如果不对 Divisor 做调整的话,指数就会由 192 变为:

$$\text{Index} = \frac{1}{0.5} \times (16 + 20 + 30) = 132$$

因此,要调整 Divisor,使得在分割前后,指数值保持一致,即:

$$\text{Index} = \frac{1}{\text{NewDivisor}} \times (16 + 20 + 30) = 192$$

可得 NewDivisor = 0.34375。

从此以后,用 NewDivisor 代替原来的 Divisor 作为计算指数时的除数,直到有新的股票分割,再调整该除数。

另外,如果构成指数的成分股有变化,则也要调整除数。例如在指数中加入一个 D 股票作为成分股,也就是说,从某天开始,计算指数时要考虑 A、B、C 和 D 四个股票的价格,这时候就要调整除数,调整的原则是改变前后保持指数值不变。

(2) 加权平均。

加权平均法是将构成指数的成分股票公司某天的市场资本值进行加总,与基准日的值相比,再除以一个常数得到该天的指数值。其计算公式为:

$$\text{Index} = \frac{1}{\text{Divisor}} \left(\frac{\sum_i N_i P_i}{\sum_i N_i^b P_i^b} \right) \quad (10.2)$$

其中, N_i 是构成指数的第 i 种成分股的股数,上标 b 表示是基准日的值。

例 10.3 若在例 10.1 中股票指数按加权平均法计算,A、B、C 三个公司的股票数分别为: $N_A = 20.0$ (亿股), $N_B = 2.5$ (亿股), $N_C = 0.5$ (亿股)。同样以 1990 年 1 月 1 日为基准日,基准日指数定为 100,则可知 $\text{Divisor} = 0.01$ 。

而 1991 年 1 月 1 日的指数值为:

$$\text{Index} = \frac{1}{0.01} \times \frac{20.0 \times 16 + 2.5 \times 20 + 0.5 \times 60}{20.0 \times 10 + 2.5 \times 15 + 0.5 \times 25} = 160$$

由于股票分割会导致公司股票数相应变化,按此法计算的指数不会有变化,因此不需要调整除数。

例 10.4 例 10.3 中 C 股票在 1991 年 1 月 1 日进行分割,每一股分割为两股,则股价由 60 降至 30,同时股数由 0.5 亿股变为 1.0 亿股,则分割后指数为:

$$\text{Index} = \frac{1}{0.01} \times \frac{20.0 \times 16 + 2.5 \times 20 + 1.0 \times 30}{20.0 \times 10 + 2.5 \times 15 + 0.5 \times 25} = 160$$

与分割前完全一致。

但是,如果遇到指数成分股变化的话,则要调整除数,调整的原则是改变成分股前后保持指数值不变。

按简单平均法计算股票指数的优点是简单,但是它也有比较大的缺点。首先,小公司股票价格变化 1 元,与大公司股票价格变化 1 元对指数产生同样的影响,这与股票市场的实际情况不符。因为在市场上花同样的力气,如果能使大公司股票价格变化 1 元的话,往往能使小公司的股票价格变化好几元。其次,股票价格的百分比变化对指数的百分比变化的影响取决于股票的初始价格。而加权平均法则克服了以上缺点,股票价格变化对指数变化的影响取决于公司规模的大小。

尽管简单平均法有比较大的缺点,但著名的道·琼斯 30 种工业平均指数和日经 225 指数就是用这种方法计算得来的。而其他的多数股票指数则采用更合理的加权平均算法,如著名的标准普尔 500(S&P500)指数和伦敦金融时报 100 种股票指数(FTSE100)等。

另外,除了简单平均和加权平均法以外,还有几何平均法等指数计算方法,但是由于其计算过于复杂,很少有股票指数采用。

例 10.5 在例 10.1 中,在 1991 年 1 月 1 日,三个股票的股价分别为: $P_A = 16$, $P_B = 20$, $P_C = 60$, 此时指数值为 192。

若 A 公司股价增加 50%,股价变为 24 元,则指数值变为:

$$\text{Index} = \frac{1}{0.5} \times (24 + 20 + 60) = 208$$

与 192 点相比增加 8.33%。

而若 C 公司股价增加 50%,股价变为 90 元,则指数值变为:

$$\text{Index} = \frac{1}{0.5} \times (16 + 20 + 90) = 252$$

与 192 点相比增加 31.25%。

可见在简单平均法下,高价股对指数的影响比较大。

例 10.6 在例 10.3 中,在 1991 年 1 月 1 日,三个股票的股价分别为: $P_A = 16$, $P_B = 20$, $P_C = 60$, 此时指数值为 160。

若 A 公司股价增加 50%,股价变为 24 元,则指数值变为:

$$\text{Index} = \frac{1}{0.01} \times \frac{20.0 \times 24 + 2.5 \times 20 + 0.5 \times 60}{20.0 \times 10 + 2.5 \times 15 + 0.5 \times 25} = 224$$

与 160 点相比增加 40%。

而若 C 公司股价增加 50%,股价变为 90 元,则指数值变为:

$$\text{Index} = \frac{1}{0.01} \times \frac{20.0 \times 16 + 2.5 \times 20 + 0.5 \times 90}{20.0 \times 10 + 2.5 \times 15 + 0.5 \times 25} = 166$$

与 160 点相比仅增加 3.75%。

可见在加权平均法下,大公司的股票对指数的影响比较大。

10.1.2 股指期货及其作用

股指期货就是以股票指数为标的的期货。期货合约的价值取决于其标的指数的值。同商品期货及其他金融期货一样,股指期货也是为了满足投资者规避风险的要求而产生的。

根据现代证券投资组合理论,股票市场的风险可分为非系统风险和系统风险。非系统风险是指由特定公司情况变化而引起的个别股票价格的波动,与整个市场无关。投资者通常可以采取组合投资的方式使不同公司股票价格的变化互相抵消,从而降低或消除此类风险。而无法通过组合投资的方法消除的风险则称为系统风险。系统风险是由宏观性因素决定的,是由整个市场的整体波动而引起的。组合投资虽然能够在很大程度上消除非系统风险,从而降低总的投资风险,但是对系统风险则无能为力。当整个市场环境发生变动时,市场中所有股票的价格会倾向于朝着同一方向变动,这时候单凭在股票市场的分散投资,显然无法规避价格整体变动的风险。为了对这种整体的市场风险加以控制,人们设计出一种新型金融工具,即股票指数期货。

由于股票指数反映股票市场的整体运动情况,因此股指期货合约的价值取决于股票市场的整体运动情况。对于一个在股票市场上的投资者来说,组合投资可以消除非系统风险,有了股指期货以后,通过在股指期货上的交易,还可以消除他在股票组合投资上面临的系统风险。

自从1982年2月,美国的堪萨斯城市交易所推出第一份股指期货合约(价值线指数期货,Value Line Index Future)以来,股指期货合约的交易迅速发展,目前,股指期货已成为最活跃的期货交易品种之一。现在在国际金融市场上,有很多种股指期货的交易,比如芝加哥期货交易所(The Chicago Board of Trade, CBOT)的道·琼斯指数期货,芝加哥商品交易所(Chicago Mercantile Exchange, CME)的S&P500指数期货,纽约期货交易所(New York Futures Exchange, NYFE)的纽约证交所(New York Stock Exchange, NYSE)综合指数期货,伦敦国际金融期货与期权交易所(London International Financial Futures and Options Exchange, LIFFE)的金融时报100种指数期货,香港期货交易所(Hong Kong Futures Exchange, HKFE)的香港恒生(Hang Seng)指数期货等等。许多地方的股指期货交易金额已远远超过现货股票的交易金额。

下面我们以美国最活跃的S&P500指数期货为例,介绍股指期货的一些具体概念。

S&P500指数是由500种成分股按加权平均法计算得出的一种股票指数,其中约85%的成分股在纽约证券交易所(NYSE)交易,其余的在NASDAQ市场和美国证券交易所(AMEX)交易。表10.1是最新的S&P500指数成分股构成的一个简单统计。

表 10.1 S&P500 指数成分股构成(2001.9.28)

所在交易所	股票种数	股票市值百分比(%)
NYSE	422	87.0
NASDAQ	76	12.9
AMEX	2	0.1

1982 年 4 月起,美国芝加哥商品交易所(CME)推出 S&P500 指数期货交易。目前期货合约条款规定每一份合约的标的为 \$250 乘以 S&P500 指数值,最小变动价位为 0.1 个指数点(或 25 美元),交割月为 3、6、9、12 月,最后交易日为结算日的前一天(通常是交割月的第 3 个星期五之前的那个星期四),最后交割时以现金结算方式进行,最后结算价格为按照交割月的第 3 个星期五所有成分股的开盘价计算的 S&P500 指数值。

例 10.7 投资者在 2001 年 5 月 30 日购买一份 9 月 21 日到期的 S&P500 指数期货,购买时期货价格为 1240 点,到期时结算价格为 985 点,则累计盈亏为:

$$\$250 \times (985 - 1240) = -\$63750$$

若该投资者在 8 月 30 日平仓,而当时的期货价格为 1120 点的话,则累计盈亏为:

$$\$250 \times (1120 - 1240) = -\$30000$$

S&P500 指数主要由在纽约证交所交易的股票构成,因此对于在该交易所交易的投资者来说,是一种比较好的套期保值工具。持有一个主要由在纽约证交所交易的股票构成的投资组合的投资者,可以通过卖空 S&P500 指数期货来进行套期保值。

例 10.8 某基金拥有一个高度分散化的股票投资组合,主要由在纽约证交所挂牌的股票构成,设在 2001 年 5 月 30 日,该股票组合的总市值为 \$60 000 000,基金管理者担心股价会下跌,但又不想立刻出售股票,因此想做一个为期 3 个月的套期保值。为此,他利用了 S&P500 指数期货合约的交易。

设当时的 S&P500 指数期货价格为 1240 点,每张合约的面值为:

$$\$250 \times 1240 = \$310000$$

$$\$60 000 000 / \$310 000 = 193.55$$

因此卖空 194 份 S&P500 期货合约。到 8 月 30 日,因股票市场整体下跌,该股票组合总市值下降 10%,为 \$54 000 000,损失 6 百万美元。此时 S&P500 指数期货价格为 1120 点,基金在期货市场上平仓,累计获利:

$$194 \times \$250 \times (1240 - 1120) = \$5820000$$

期货交易中获得的 582 万美元收益较好地弥补了股票组合市值下降给基金带来的损失。

除了可作为一种良好的套期保值工具之外,与股票现货交易相比,股指期货还

具有下列优势：

(1) 投资者无须直接购买股票即可在股票市场进行投资。可以免去挑选股票的麻烦，交易费用也比股票交易低很多。

(2) 投资者可以以低成本获得相当于高度分散化的股票组合的效果。购买 S&P500 指数期货相当于投资于一个由 500 种股票组成的投资组合，而如果要真正构造一个这样的股票组合的话，不但要花费很多的交易费用，而且需要的资金量也是非常非常巨大的。因此对于一个想要在股市上进行高度分散化投资，而资金量又不是很大的投资者来说，股指期货是一个非常好的选择。

(3) 提供投资杠杆。投资者只需要投入少量的保证金即可参与在股票市场的价格变动中获利的投资行为。在国外，虽然购买股票也可以用保证金的方式来获得杠杆效应，但是，相对来说，期货交易提供的杠杆率要高很多。当然，杠杆率高，相应的风险也高，这是投资者在享受高杠杆率带来的好处的同时必须付出的代价。

(4) 提供方便的做空机制。在国外，有些市场允许卖空股票，但是如果卖空股票的话，通常需要一定的股票借贷安排以便交割所卖的股票，此外，有些交易所对卖空股票还有其他的限制。但是对于股指期货交易，则完全没有这类问题。因此，投资者可以很容易地通过卖空股指期货合约在股市下降期间获利。

10.1-3 股指期货的定价

对股指期货价格的确定，理论上可以通过无风险套利定价方法进行。所谓无风险套利定价的意思是，当市场之间价格不平衡，投资者通过在不同市场的同时操作，可以在不需要初始投资的情况下获得无风险的收益，而无风险套利机会一旦出现，就会有很多套利者参与套利活动，他们的套利活动的结果将使市场的价格发生变动，致使套利机会消失，即达到所谓的无风险套利均衡状态。按照这一方法，假设投资者可以以同样的无风险利率进行借贷，则任何的无风险投资将获得而且只能获得与无风险利率相同的收益率。

考虑以下策略：

(1) 买入一个股票组合。该组合中成分股与构成指数的成分股的结构比例完全相同，股票组合的总市值等于按当时的实际股票指数计算的一份期货合约的面值。

(2) 同时出售一份股指期货合约。

(3) 持有上述期货合约头寸及股票组合，并将收到的任何股息进行无风险投资。

(4) 在期货到期日进行结算，同时卖出股票组合。

按照上述策略，设在期初，记为 t 时刻，股票指数为 S ，期货价格为 F ，则购买股票组合的投资额为 S ，到期时，记为 T 时刻，股指期货价格应等于实际股指值，设实际股票指数值为 S_T ，则 $F_T = S_T$ 。于是有：

则出售股票组合所得为： S_T （未考虑股息）；

在股指期货交易中的盈亏为: $F - F_T = F - S_T$;

投资期间收到的股息的现值(t 时刻)记为 D ,按无风险利率 r 投资,则在 T 时刻的本利和为: $D e^{r(T-t)}$ 。

因此,在 T 时刻结束投资,回收的金额为:

$$S_T + F - S_T + D e^{r(T-t)} = F + D e^{r(T-t)}$$

F 为 t 时刻已知,若假设 D 也已知的话,则该策略为无风险投资,其投资收益率为无风险利率 r ,即

$$F + D e^{r(T-t)} = S e^{r(T-t)}$$

可得:

$$F = (S - D) e^{r(T-t)}$$

即为 t 时刻股指期货的理论价格。

对于投资期间股票组合收到的红利 D ,由于组合包含很多种股票,每种股票都可能有红利发放,因此一个比较合理又容易处理的假设是股票组合按股票组合价值的一定比例连续发放股利,设连续红利率为 α ,根据上一章的讨论,我们可以得到:

$$D = (1 - e^{-\alpha(T-t)})S$$

代入前一式,得:

$$F = S e^{(r-\alpha)(T-t)} \quad (10.3)$$

这是用连续红利率形式估计指数组合的股利发放情况时,股指期货的理论定价。

例 10.9 设 2001 年 6 月 21 日 S&P500 指数值为 1237 点,当时 3 个月期无风险利率为 3%,据估计 S&P500 指数组合的红利发放率为 5%,则 9 月 21 日到期的 S&P500 指数期货的价格应为:

$$F = S e^{(r-\alpha)(T-t)} = 1237 \times e^{(0.03-0.05) \times 0.25} = 1230.8$$

10.2 股指期货交易策略

10.2-1 短期国债和股票的转换

股票指数能反映股票市场的整体运动情况,股指期货的价格随股票市场的整体波动而波动,购买一个股指期货与购买一个股票组合具有非常相似的效果,而且与直接购买股票组合相比,需要的手续费等交易费用要低得多。卖出一个股指期货相当于卖空一个股票组合,而且不受卖空股票的诸多限制。因此,股指期货成为机构投资者手中一个非常灵活而有效的金融工具。

机构投资者,比如投资基金、保险公司等,通常拥有由现金(主要是短期国债)、长期固定收入证券和股票构成的投资组合。为了提高投资收益,基金经理们经常要根据对市场的预期对投资组合进行调整。如果一个基金经理相信今后一段时间股票市场会有比较好的表现,他就倾向于在他管理的投资组合中让股票占据较大的比例,如果他认为股票市场将会下跌,他就会减少股票投资的比例,而增加固定收入证券的投资比例。为了对投资组合进行调整,基金经理们可能会发现他们需要买卖大量的股票和短期国债,在买卖过程中会发生大量的交易费用,包括佣金及买卖差价等。而通过股指期货的买卖则可以暂时地实现短期国债和股票组合之间的转换,而不需要实际买卖大量的股票和短期国债,从而大大地降低交易成本。转换过程可以用以下两个式子简单地表示:

$$\text{合成的短期国债} = \text{股票现货} - \text{股指期货}$$

$$\text{合成的股票现货} = \text{短期国债} + \text{股指期货}$$

基金经理如果想暂时将手中的股票换成债券,只要卖出股指期货,而如果想把手中的国债换成股票,则可买入股指期货。

下面我们通过具体的例子来说明如何进行转换以及转换的效果。

例 10.10 设某基金经理管理着一个股票投资组合,其股票组合完全是仿造 S&P500 指数组合构建的。在 2 月 15 日的时候,股票组合的市场价值为 1.2 亿美元,这时候他希望将他在股票上的投资转移到 6 个月期的短期国债上,从而获得稳定的收益。此时短期国债利率为 6%,S&P500 指数值为 1200 点,估计指数组合支付的连续红利率为 4%。该经理可以有以下两种方式实现他的投资计划:

(A) 出售价值 1.2 亿美元的股票,并购买国债,6 个月后组合的价值为:

$$1.2 \times e^{6\% \times 0.5} = 1.2365 (\text{亿美元})$$

(B) 出售 9 月份到期的 S&P500 期货,为简单起见,假设刚好 9 月 15 日到期。按照我们前面的讨论,此时的 S&P500 期货价格应为:

$$F = 1200 \times e^{(0.06-0.04) \times 7/12} = 1214.08 \approx 1214.1$$

按照现在的指数值 1200 点计算得到一份期货合约的面值为:

$$\$250 \times 1200 = \$300000$$

$$\$120000000 / \$300000 = 400$$

所以卖出 400 份 S&P500 指数期货,然后到 8 月 15 日平仓。

采用(A)方式,不管股市情况如何,到期时(8 月 15 日)组合的价值总是 1.2365 亿美元。现在我们来看若采用(B)方式,在不同的股市情况下,组合的价值是多少,我们假设以下两种情况:

(1) 股市下跌,到 8 月 15 日,S&P500 指数为 1000 点。

因股票组合完全按 S&P500 指数组合构建,所以股票组合的价值与指数同比例下降,到 8 月 15 日,股票组合的市场价值降为:

$$1.2 \times \frac{1000}{1200} = 1.0(\text{亿美元})$$

此时的股指期货价格应为：

$$F = 1000 \times e^{(0.06 - 0.04) \times 1/12} = 1001.67 \approx 1001.7$$

期货平仓，在期货交易上的盈亏为：

$$400 \times \$250 \times (1214.1 - 1001.7) = \$2124000 = 0.2124(\text{亿美元})$$

另外，由于没有卖掉股票，6个月来累计收到的红利本利和为：

$$1.2 \times (e^{0.04 \times 0.5} - 1) = 0.0242(\text{亿美元})$$

因此整个组合的价值为：

$$1.0 + 0.2124 + 0.0242 = 1.2366(\text{亿美元})$$

与采用(A)方式的结果几乎完全一致，仅相差约万分之一。

(2) 股市上涨，到8月15日，S&P500指数为1500点。

此时，股票组合的市场价值上升为：

$$1.2 \times \frac{1500}{1200} = 1.5(\text{亿美元})$$

此时的股指期货价格应为：

$$F = 1500 \times e^{(0.06 - 0.04) \times 1/12} = 1502.5$$

期货平仓，在期货交易上的盈亏为：

$$400 \times \$250 \times (1214.1 - 1502.5) = -\$2884000 = -0.2884(\text{亿美元})$$

另外，由于没有卖掉股票，6个月来累计收到的红利本利和为：

$$1.2 \times (e^{0.04 \times 0.5} - 1) = 0.0242(\text{亿美元})$$

因此整个组合的价值为：

$$1.5 - 0.2884 + 0.0242 = 1.2358(\text{亿美元})$$

与采用(A)方式的结果相差约0.06%，基本也可以认为一致。

从本例可以看到，利用股指期货可以成功地将股票收益转换为短期国债的收益，例中没有做到严格相等的原因，在于转换期限与期货的到期日没有完全匹配，所用的股指期货为9月15日到期，而转换期限到8月15日为止，在8月15日股指期货价格与当时的实际股票指数值仍有一定的差别（称为基差），如果转换期限到9月15日为止，与股指期货到期日一致的话，理论上采用(B)方式与采用(A)方式可以得到完全相等的结果。

另外，例中没有考虑交易手续费的问题，事实上，采用(A)方式可能要付出比(B)方式多得多的交易费用，这也是采用股指期货将股票临时转换为短期国债的一

大好处。

例 10.11 设某基金经理持有 8 月 15 日到期的短期国债，市场价值为 1.2 亿美元，在 2 月 15 日的时候，他预计股票市场将有一轮上升行情，想把这笔资金投入股票市场，仿造 S&P500 指数组合构建一个股票投资组合，以获得较高的收益。

该经理可以以与例 10.10 刚好相反的两种方式实现他的投资计划：

(A) 出售 1.2 亿美元的短期国债，并购买仿造 S&P500 指数组合构建的股票组合；

(B) 购买 9 月份到期的 400 份 S&P500 期货，然后到 8 月 15 日平仓。

下面我们看在股市的不同情况下，采用两种方式的最后结果：

(1) 股市下跌，到 8 月 15 日，S&P500 指数为 1000 点。

借用例 10.9 的结果，得到：

A 方式	B 方式
股票组合价值(亿元)	1.0
收到红利价值(亿元)	0.024 2
组合总价值(亿元)	1.024 2
短期国债价值(亿元)	1.236 5
期货损益(亿元)	-0.212 4
组合总价值(亿元)	1.024 1

(2) 股市上涨，到 8 月 15 日，S&P500 指数为 1500 点。

同样借用例 10.9 的结果，得到：

A 方式	B 方式
股票组合价值(亿元)	1.5
收到红利价值(亿元)	0.024 2
组合总价值(亿元)	1.524 2
短期国债价值(亿元)	1.236 5
期货损益(亿元)	0.288 4
组合总价值(亿元)	1.524 9

可见，不管股市情况如何，(A) 方式和(B) 方式得到的结果都是一致的。

通过上面的例子，我们看到，对机构投资者来说，利用股指期货可以很方便地实现短期国债和股票组合之间的转换，转换的效果也非常理想。

10.2-2 交叉套期保值

上面我们讨论了利用股指期货将股票组合转换为短期国债以实现套期保值。在例子中我们假定要保值的股票组合是仿造指数组合构造的。但如果要保值的股票组合与指数组合不同，那又该如何进行套期保值呢？这里就要用到交叉套期保值的方法。

所谓交叉套期保值，就是指当要保值的资产价值与所用的期货合约的标的资产价格（标的变量）的变化不是完全同步的时候，要考察两者价格变化的相关关系，并确定合适的套期保值比率，即用于套期保值的期货合约的面值与要保值的资产的面值的关系。

设：要保值的资产的价格用 S 表示，用于保值的期货的价格用 F 表示，定义：

ΔS :在套期保值期间,现货价格 S 的变化;

ΔF :在套期保值期间,期货价格 F 的变化;

σ_S : ΔS 的标准差;

σ_F : ΔF 的标准差;

ρ : ΔS 和 ΔF 之间的相关系数;

h :套期保值比率。

由于套期保值是通过在期初买卖期货,然后到期末再作相反交易这种方式进行的,因此在期初要决定如何进行套期保值的时候,并不知道 ΔS 和 ΔF 会是多少,它们是不确定的量,只能对它们进行估计。估计必然会产生误差,标准差 σ_S 和 σ_F 就是用来度量实际可能实现的值与估计值之间的误差的。套期保值的原理是利用现货价格和期货价格变化的相关性,通过在期货和现货市场的相反操作来使它们的价格变化互相抵消,从而达到使结果确定的目的。因此在做套期保值的时候,要对它们价格变化的相关系数 ρ 进行估计。

这里套期保值比率 h 的含义是:对 1 份现货资产的多头头寸用 h 份期货合约的空头头寸进行套期保值,因此,1 份现货资产的多头头寸经过套期保值后,组合的头寸为:

1 份现货资产的多头头寸 $-h$ 份期货合约的多头头寸

在套期保值期间,该套期保值组合头寸的价值变化为:

$$\Delta V = \Delta S - h \Delta F \quad (10.4)$$

其方差为:

$$\text{var}(\Delta V) = \sigma_S^2 + h^2 \sigma_F^2 - 2\rho\sigma_S\sigma_F \quad (10.5)$$

对套期保值者来说,其目的是使结果尽可能确定,因此要求 ΔV 的方差尽可能小(注意,不是使 ΔV 本身尽可能小,事实上, ΔV 越大,表明组合价值增加得越多,对投资者越有利),我们可以通过改变 h 使 ΔV 的方差变小,发现使 $\text{var}(\Delta V)$ 最小的 h 值为:

$$h = \rho \frac{\sigma_S}{\sigma_F} \quad (10.6)$$

此时的套期比率 h 称为最佳套期比率。

例 10.12 一个规模比较小的基金的经理希望利用 S&P500 指数期货对他管理的一个股票投资组合进行为期 3 个月的套期保值,但是该组合只包含约 10 种股票,显然与 S&P500 指数成分股的构成及比例均不同,组合的价值变化与指数值的变化当然也就不能保持完全的一致了。设保值期限为 5 月 15 日到 8 月 15 日,在 5 月 15 日的时候,股票组合的市场价值为 500 万美元,9 月 15 日到期的 S&P500 指数期货价格为 1250 点。

为了要确定一个合适的套期比率,首先要确定 σ_S 、 σ_F 和 ρ ,我们可以设法利用

历史数据对它们进行估计。根据(10.6)式中各符号的定义, σ_S 、 σ_F 和 ρ 为从 5 月 15 日到 8 月 15 日期间的 ΔS 和 ΔF 的标准差及相关系数,但是对 ΔF ,我们没有足够多的历史数据可供使用,很难估计 σ_F 和 ρ ,幸好(10.6)式对时间段长短的要求并不太高,我们可以用历史上每周的 ΔS 和 ΔF 数据来估计 σ_S 、 σ_F 和 ρ 作为代替。设 5 月 15 日之前 20 周的历史数据如表 10.2 所示。

表 10.2

日期 (周)	股票组合价值 (万美元)	ΔS (万美元)	股指期货价格 (点)	ΔF (万美元)
0	498.5		1275	
1	502.1	3.9	1289	0.350
2	519.7	17.3	1347	1.450
3	520.2	0.5	1326	-0.525
4	545.3	25.1	1360	0.850
5	542.3	-3.0	1373	0.325
6	551	8.7	1352	-0.525
7	542.7	-8.3	1330	-0.550
8	524.5	-18.2	1255	-1.875
9	523.3	-1.2	1257	0.050
10	509.4	-13.9	1253	-0.100
11	503	-6.4	1197	-1.400
12	477.9	-25.1	1142	-1.375
13	475.5	-2.4	1152	0.250
14	457.4	-18.1	1106	-1.150
15	480.4	23.0	1168	1.550
16	481.2	0.8	1190	0.550
17	474.5	-6.7	1210	0.500
18	486.2	11.7	1266	1.400
19	495.7	9.5	1259	-0.175
20	500	4.3	1250	-0.225

注: ΔF 按照每一指数点 250 美元计算。

由表 10.2 可得 $\sigma_S = 13.47$, $\sigma_F = 0.964$ 和 $\rho = 0.779$, 因此,

$$h = 0.779 \times \frac{13.47}{0.964} = 10.88$$

也就是说,为了要做到最佳的套期保值效果,该基金经理应卖出 11 份 S&P500 股指期货合约。

而如果按照 1 比 1 的比率,按面值计算:

$$\$5\,000\,000 / (\$250 \times 1\,250) = 16$$

即要卖出 16 份期货合约。

之所以应卖出 11 份而不是 16 份,是因为要保值的股票组合的价值与 S&P500 股指并不保持完全相同的变化,这里的套期保值只能对其中变化相同的部分起作用,额外的期货头寸只会增加整个组合最终结果的不确定性。

从上述例子看,对于与股指并不保持同步变化的股票组合,同样可以利用股指期货进行套期保值,其结果是对股票组合价值的变化中与股指同步变化的部分进行对冲。事实上,如果投资者相信某个股票或股票组合会有好于大盘的表现,则可买入这个股票或股票组合,并利用股指期货对冲掉其中与股指同步变化的部分,从而不管整个市场是上升还是下降,都可以得到该股票或股票组合高于大盘部分的收益。

10.2-3 股票组合的 Beta 值

从套期比率的概念来看,利用指数期货进行套期保值只是对股票组合中与指数变化相同的部分起作用。我们知道,股票或股票组合的 Beta 值反映股票或股票组合价值与市场组合价值的同步变化程度,而市场组合的价值的变化,正好可以用市场指数的变化来代替,因此我们可以设法利用 Beta 值进行交叉套期保值。下面我们讨论股票组合的 Beta 值和最佳套期比率的关系。

根据定义,股票组合的 Beta 值 β_P 可以写为:

$$\beta_P = \rho_{PM} \frac{\sigma_P}{\sigma_M} \quad (10.7)$$

其中, σ_P 和 σ_M 分别表示股票组合的收益率和市场组合的收益率的标准差, ρ_{PM} 是它们之间的相关系数。

而最佳套期比率的表示式为:

$$h = \rho_{FS} \frac{\sigma_S}{\sigma_F} \quad (10.8)$$

其中, σ_S 和 σ_F 分别表示股票组合的价值变化 ΔS 和指数期货价格变化 ΔF 的标准差, ρ_{FS} 是它们之间的相关系数。

由于指数一般能反映市场的整体运动,指数组合的收益率往往与市场组合的收益率近似相等,而指数期货价格与指数也保持同步变化,指数期货价格的收益率与指数组合的收益率也近似相等,因此在计算 Beta 值的时候,可以用指数期货价格的收益率近似代替市场组合的收益率,于是:

$$\sigma_M = \text{dev}\left(\frac{\Delta F}{F}\right) = \frac{1}{F} \text{dev}(\Delta F) = \frac{1}{F} \sigma_F \quad (10.9)$$

而如果用 S 表示要计算其 Beta 值的股票组合的价值的话,则其收益率的标准差为:

$$\sigma_P = \text{dev}\left(\frac{\Delta S}{S}\right) = \frac{1}{S} \text{dev}(\Delta S) = \frac{1}{S} \sigma_S \quad (10.10)$$

它们的相关系数为：

$$\rho_{FS} = \frac{\text{var}\left(\frac{\Delta F}{F}, \frac{\Delta S}{S}\right)}{\text{dev}\left(\frac{\Delta F}{F}\right)\text{dev}\left(\frac{\Delta S}{S}\right)} = \frac{\sigma_{FS}}{\sigma_F \sigma_S} = \rho_{FS} \quad (10.11)$$

代入 Beta 系数的表达式，可得：

$$\beta_P = \frac{F}{S} \rho_{FS} \frac{\sigma_S}{\sigma_F} \quad (10.12)$$

所以，最佳套期比率可利用股票组合的 Beta 值表示为：

$$h = \frac{S}{F} \beta_P \quad (10.13)$$

例 10.13 考虑以下股票组合：A 股票 50 000 股，B 股票 100 000 股，C 股票 10 000 股，它们的股价和 Beta 值分别为： $P_A = \$30$, $\beta_A = 0.9$, $P_B = \$50$, $\beta_B = 1.3$, $P_C = \$20$, $\beta_C = 1.1$ 。

则我们可以得到组合的总价值为：

$$S = \$30 \times 50000 + \$50 \times 100000 + \$20 \times 10000 = \$6700000$$

组合的 Beta 值为：

$$\beta_P = \frac{30 \times 50}{6700} \times 0.9 + \frac{50 \times 100}{6700} \times 1.3 + \frac{20 \times 10}{6700} \times 1.1 = 1.2045$$

设当前的 S&P500 指数值为 1200 点，则如果要用指数期货对上述股票组合进行套期保值的话，最佳套期比率应为：

$$h = \frac{\$6700000}{\$250 \times 1200} \times 1.2045 = 26.9$$

也就是说，应卖出 27 份指数期货合约。

上面我们介绍了如何利用指数期货将投资组合在短期国债和股票组合之间进行转换，以及如何利用股票组合的 Beta 值进行套期保值。事实上，在实践中，许多基金经理倾向于根据自己对市场的预期改变所管理的投资组合的 Beta 值，而不是将整个组合在国债和股票组合之间进行转换。例如，一个预计股市将下跌的基金经理会调低他的投资组合的 Beta 值，而一个预计股市将上升的基金经理会调高他的投资组合的 Beta 值。对于这种操作，股指期货同样是一个非常好的工具。

由于投资组合的 Beta 值是构成组合的资产（包括风险资产和无风险资产）的 Beta 值的加权平均，要改变组合的 Beta 值只需要调整组合中无风险资产的比例即可。

$$\begin{aligned} \text{组合的 Beta 值} &= \text{无风险资产的 Beta 值} \times \text{无风险资产在组合中所占的比例} \\ &\quad + \text{风险资产的 Beta 值} \times \text{风险资产在组合中所占的比例} \\ &= \text{风险资产的 Beta 值} \times \text{风险资产在组合中所占的比例} \end{aligned}$$

比如在例 10.13 中,原先股票组合的 Beta 值为 1.2045,经套期保值后,组合的价值变化与市场变化的相关性为零,将整个组合转换为一种不受股票市场整体风险影响的资产,也就是说,其 Beta 值变为零。如果不希望组合的 Beta 值降到零,而只是想调低 Beta 值,例如将 Beta 值降到 0.8,则不需要卖出 27 份指数期货合约。令:

$$0.8 = 1.2045 \times \frac{\text{保留风险资产价值}}{\$6700000}$$

得:保留风险资产价值 = \$4449.979
也就是说,要保值的资产价值为 \$2250.021。套期比率为:

$$h = \frac{\$2250.021}{\$250 \times 1200} \times 1.2045 = 9.03$$

即只需要卖出 9 份指数期货合约即可。

10.3 股指期权及股指期货期权

10.3-1 股指期权及其交易策略

除了股指期货之外,股指期权也是对股票组合进行套期保值的一个重要工具。股票指数期权就是以某种股票指数为标的的期权,同股指期货一样,股指期权也是以现金结算的。

国际上有不少交易所有股指期权的交易,有很多种股票指数成为股指期权的标的商品。例如在芝加哥期权交易所(CBOE)交易的股指期权的标的指数主要有:S&P500 指数、S&P100 指数和主要市场指数(Major Market Index),其中 S&P500 指数期权是欧式的,S&P100 指数和主要市场指数期权是美式的。一般的期权有效期比较短,大多在 3 个月左右,在 CBOE 还提供基于以上指数的长期期权,被称为 LEAPS(long-term equity anticipation securities),LEAPS 的期限可长达 3 年。

下面我们以在 CBOE 交易的 S&P500 指数期权合约为例,介绍其具体条款。该期权合约规定:

- (1) 期权合约为欧式;
- (2) 期权标的为 S&P500 指数,每一指数点相当于 100 美元;
- (3) 执行价以指数点表示,开始的时候提供实值、两平、虚值三种执行价格的期权品种,当标的指数值超过现有最高执行价或低于现有最低执行价时,再提供具有新的执行价的期权品种,执行价的间隔为 5 个指数点(长期期权是 25 个指数点);

(4) 期权费的报价也按指数点表示,每一指数点相当于 100 美元,对低于 3 点的期权,期权费报价的最小间隔为 0.05 个指数点(相当于 \$5),其余的期权费报价的最小间隔为 0.1 个指数点(相当于 \$10);

(5) 失效日为到期月的第三个星期五之后的那个星期六;

(6) 到期以现金结算方式交割,以失效日前一个交易日(通常为星期五)的开盘指数作为指数结算价格,结算金额等于执行价格与指数结算价格之差乘以 100 美元,在失效日后的第一个工作日进行现金支付;

(7) 到期月为最近的 3 个月,再加 3 个 3 月份系列(3、6、9、12 月)的月份,比如在 1 月份的到期日之前,就有 1、2、3、6、9、12 月到期的期权合约可供交易。

此外,还有关于头寸限制、保证金等条款。

我们前面已经仔细介绍过股票期权的交易策略,股指期权本质上同股票期权一样,只不过股票期权的标的是单一的股票,而股指期权的标的是股票组合。因此,股指期权的用法和股票期权的用法相同,同样可以用于进行套期保值或者投机,股票期权上用的很多交易策略在股指期权上同样可以使用。

例如,当投资者或投机者希望从股市的上升中获利,但又不想承担股市下跌的风险,则可买入指数的看涨期权或构造牛市差价期权;当投资者或投机者预期股市将发生巨大波动,但无法确定是上升还是下降时,可购买由指数期权组成的跨式期权或宽跨式期权等。

例 10.14 设某基金经理管理着一个股票投资组合,其股票组合完全是仿造 S&P500 指数组合构建的。在 2 月 15 日的时候,股票组合的市场价值为 1.2 亿美元,这时候他担心在未来 6 个月期间股市可能会下跌,但又不愿意像在例 10.10 中那样将股票组合转换为短期国债,因为那样的话,就不能享受万一股市上升给他带来的好处。为此,他决定购买 9 月份到期的 S&P500 股指看跌期权(设为 9 月 15 日到期)。设此时短期国债利率为 6%,S&P500 指数值为 1200 点,估计指数组合支付的连续红利率为 4%,设执行价为 1200 点的 S&P500 指数看跌期权报价为 65 点。

由于在 CBOE 交易的 S&P500 股指期权每一指数点对应 100 美元,一份期权的标的面额为:

$$\$100 \times 1200 = \$120\,000$$

因此,需要购买的期权为:

$$\$120\,000\,000 / \$120\,000 = 1\,000(\text{份})$$

需要支付的期权费为:

$$\$100 \times 65 \times 1\,000 = \$6\,500\,000$$

假设这笔期权费是由以 6% 的利率获得的贷款支出,则到 8 月 15 日应偿还:

$$\$6\,500\,000 \times e^{6\%\times 0.5} \approx \$6\,700\,000$$

下面我们考察在不同的股市情况下,采用了上述期权保值策略后的组合的价值是多少。我们看以下两种情况:

(1) 股市下跌,到8月15日,S&P500指数为1000点。

此时股票组合价值下降为1.0亿美元。

看跌期权价格约为200点,出售看跌期权得到:

$$\$100 \times 200 \times 1000 = \$20\,000\,000$$

偿还购买期权时的贷款后净收入为 $\$13\,300\,000 = 0.133$ 亿美元。

另外,股利收入为0.0242亿美元。

所以组合的总价值为:

$$1.0 + 0.133 + 0.0242 = 1.1572(\text{亿美元})$$

(2) 股市上涨,到8月15日,S&P500指数为1500点。

此时股票组合价值上升为1.5亿美元。

看跌期权价格小于0.1点,出售看跌期权得到的收入忽略不计。

偿还购买期权时的贷款支出为 $\$6\,700\,000 = 0.067$ 亿美元。

另外,股利收入为0.0242亿美元。

所以组合的总价值为

$$1.5 - 0.067 + 0.0242 = 1.4572(\text{亿美元})$$

与例10.10中(A)方式(即将股票换成短期国债)的结果1.2365亿美元相比,我们发现,当股市下跌时,采用期权保值方法的组合价值有所下降,但下降幅度有限(约相当于期权费的支出),而当股市上升时,组合的价值会随股市一起上升,但上升的幅度比单纯的股票组合价值上升幅度要小一些(差额也大致相当于期权费的支出)。

可见,采用期权保值策略可使得组合的价值在市场下跌时保持一定的水平,而在市场上升时随市场一起上升,当然,为此要付出一定的代价,即期权费的支出。

上例中,要保值的股票组合是仿造指数组合构成的,当要保值的股票组合不同于指数组合时,可借用上一节中指数期货的最佳套期比率的概念来决定到底要使用多少期权头寸。例如假设上例中的股票组合的Beta值为2.0,则应购买2000份看跌期权。

10.3-2 股指期权的定价

股票指数期权的定价与股票期权的定价相似。由于股票指数的计算是基于一系列股票的价格,可以看作是一个股票组合的价值,因此我们可以假设一个基于股票组合的期权来对股票指数期权进行定价。一个股票组合的价值变化过程与单个股票的价格变化过程并没有本质的区别,只不过我们相信它的波动率会比单个股票价格变化的波动率要小一些而已。另外,由于一个指数往往由许多种股票构成,这些股票都可能有红利发放,从平均效果看,假设股票组合按连续红利率发放红利

是一个比较合理的近似。

由此可见,对股指期权的定价就相当于对一个按连续红利率支付红利的股票的期权的定价。对于一个按连续红利率支付红利的股票的欧式期权的定价,我们在前面已经讨论过,可以使用 Black-Scholes 公式,因此,欧式的股指期权的定价公式为:

$$c = e^{-a(T-t)} SN(d_1) - e^{-r(T-t)} KN(d_2) \quad (10.14)$$

$$p = e^{-r(T-t)} KN(-d_2) - e^{-a(T-t)} SN(-d_1) \quad (10.15)$$

其中,

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r - a + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

式中, S 表示股票指数的现值, K 是执行价, a 是指数的红利收益率, σ 是指数波动率, r 是无风险利率。

例 10.15 考虑在 CBOE 交易的 S&P500 股指期权,执行价为 1200 点,设当前指数值为 1200 点,估计指数波动率为 20%,红利率为 4%,无风险利率为 6%,距离到期日还有 7 个月。求看涨期权和看跌期权的理论价值。

由 $S = 1200$, $K = 1200$, $r = 0.06$, $a = 0.04$, $T-t = 7/12$, $\sigma = 0.2$, 得:
 $d_1 = 0.1528$, $d_2 = 0$, $N(d_1) = 0.5607$, $N(d_2) = 0.5$, $N(-d_1) = 0.4393$,
 $N(-d_2) = 0.5$, 所以:

$$c = e^{-0.04 \times 7/12} \times 1200 \times 0.5607 - e^{-0.06 \times 7/12} \times 1200 \times 0.5 = 77.96$$

$$p = e^{-0.06 \times 7/12} \times 1200 \times 0.5 - e^{-0.04 \times 7/12} \times 1200 \times 0.4393 = 64.36$$

即每一份看涨期权价值 7796 美元,而一份看跌期权价值 6436 美元。当然,实际的市场价格与理论价值可能会有一定的偏离。

B-S 公式仅适用于欧式期权,而对美式期权(比如在 CBOE 交易的 S&P100 指数和主要市场指数期权)的定价,由于有提前执行的可能,无法用 B-S 公式给出解析公式,只能用数值方法,比如二叉树的方法,对指数值构造二叉树,在此二叉树的基础上逐步倒推。

例 10.16 在 CBOE 交易的 S&P100 股指期权,执行价为 500 点,设当前指数值为 500 点,估计指数波动率为 20%,红利率为 4%,无风险利率为 6%,距离到期日还有 3 个月。求看跌期权的理论价值。

在 CBOE 交易的 S&P100 股指期权是美式期权,不能用 B-S 公式,我们试用二叉树方法进行定价。在第 9 章中,我们讨论过美式股票期权的二叉树定价方法,这里只要套用即可。为了简单起见,我们采用 3 期的二叉树,则二叉树的有关参数如下:

$$n = 3, \Delta t = 1/12, r = 0.06, a = 0.04, \sigma = 0.2$$

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = e^{0.2 \times \sqrt{1/12}} = 1.059$$

$$d = e^{(r - \sigma)\Delta} = 0.944$$

$$q = \frac{e^{(r + \sigma)\Delta} - d}{u - d} = \frac{e^{0.02 \times 1/12} - 0.944}{1.059 - 0.944} = 0.5015$$

$$1 - q = 0.4985$$

$$e^{-r\Delta} = e^{-0.06/12} = 0.995$$

根据上述参数就可以计算二叉树上每一个节点的指数值,我们得到:

$$\begin{array}{llll} S_{0,0} = 500 & S_{1,0} = 529.72 & S_{2,0} = 561.20 & S_{3,0} = 594.56 \\ S_{0,1} = 471.95 & S_{1,1} = 500 & S_{2,1} = 529.72 & \\ S_{0,2} = 445.47 & S_{1,2} = 471.95 & & \\ S_{0,3} = 420.48 & & & \end{array}$$

然后,我们有:

$$P_{3,0} = 0, P_{2,1} = 0, P_{1,2} = 28.05, P_{0,3} = 79.52$$

再沿二叉树倒推,可得:

$$P_{2,0} = \max(0, e^{-r\Delta}[qP_{3,0} + (1-q)P_{2,1}]) = 0$$

$$\begin{aligned} P_{1,1} &= \max(0, e^{-r\Delta}[qP_{2,1} + (1-q)P_{1,2}]) = 0.995 \times 0.4985 \times 28.05 \\ &= 13.91 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{0,2} &= \max(54.53, e^{-r\Delta}[qP_{1,2} + (1-q)P_{0,3}]) \\ &= \max[54.53, 0.995 \times (0.5015 \times 28.05 + 0.4985 \times 79.52)] \\ &= 54.53 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{1,0} &= \max(0, e^{-r\Delta}[qP_{2,0} + (1-q)P_{1,1}]) = 0.995 \times 0.4985 \times 13.91 \\ &= 6.90 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{0,1} &= \max(28.05, e^{-r\Delta}[qP_{1,1} + (1-q)P_{0,2}]) \\ &= \max[28.05, 0.995 \times (0.5015 \times 13.91 + 0.4985 \times 54.53)] \\ &= 33.99 \end{aligned}$$

最后得到:

$$\begin{aligned} P &= P_{0,0} = \max(0, e^{-r\Delta}[qP_{1,0} + (1-q)P_{0,1}]) \\ &= 0.995 \times (0.5015 \times 6.90 + 0.4985 \times 33.99) = 20.30 \end{aligned}$$

在 3 期的二叉树模型下,这样一份 S&P100 看跌期权的理论价值为 2030 美元。事实上,对于一个 3 个月期的期权来说,3 期的二叉树还是过于简单粗糙了一些, n 至少要取 20 到 30 才比较合理。当 n 比较大的时候,像上面那样一步一步手工计算显然太过繁杂,我们完全可以把这些重复的工作交给计算机去做,让它给出最后的结果就行了。上述例子中,如果取 $n = 30$,则得到看跌期权价为 $P = 18.59$ 。

10.3.3 股指期货期权

有许多交易所交易一种与股指期权效果相似的期权，即股指期货期权。股指期货期权是针对股指期货的期权，股指期货期权的标的商品是股指期货，期权的到期日通常比期货的到期日早几天或同时到期。我们以在 CME 交易的 S&P500 股指期货期权为例考察股指期货期权。

在 CME 交易的 S&P500 股指期货期权的标的商品是一张 S&P500 股指期货合约，期权的执行价格就是期货的协议价格，也就是说，执行一个股指期货期权将得到一个有价值的股指期货的头寸。事实上，由于期货是每日结算的，执行一个股指期货期权将得到一个股指期货的头寸再加上一定数额的现金，现金的数额取决于期权的执行价和执行时期货价格的差。例如，一份 S&P500 股指期货看涨期权，执行价为 1050 点，执行时 S&P500 股指期货价格为 1250 点，则通过执行该期权，期权持有者将得到一份期货合约的多头头寸和相当于 200 个指数点的现金（即 $\$250 \times 200 = \$50,000$ ），当然，如果他不希望继续持有期货合约头寸的话，可以无成本地立刻对期货头寸进行平仓。可见，股指期货期权实际上也相等于现金结算的，只不过股指期权用的结算价格是指数现值，而股指期货期权用的结算价格是指数期货的价格。

如果我们用 S 表示股票指数值， F 表示股指期货价格， K 表示股指期货期权的执行价，则执行看涨期权可得到收入为：

$$\max(F - K, 0)$$

执行看跌期权可得到收入为：

$$\max(K - F, 0)$$

现在，我们假设一个欧式的股指期货看涨期权，其到期日与期货的到期日相同，则由于在到期日，期货价等于现货价，该期权的到期价值为：

$$c_T = \max(F_T - K, 0) = \max(S_T - K, 0) \quad (10.16)$$

与一个股指期权完全相同，可以用 B-S 公式来表示：

$$c = e^{-\alpha(T-t)} SN(d_1) - e^{-\kappa(T-t)} KN(d_2) \quad (10.17)$$

另外，由于 $F = Se^{(r-\alpha)(T-t)}$ ， $S = Fe^{(\alpha-\kappa)(T-t)}$ ，期货期权的价格也可表示为：

$$c = e^{-r(T-t)} [FN(d_1) - KN(d_2)] \quad (10.18)$$

其中，

$$d_1 = \frac{\ln(F/K) + (\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

对于欧式的期货期权，我们可以利用 B-S 公式得到其理论价值，但是交易所交

易的期货期权通常是美式的,包括CME的S&P500股指期货期权,它们有提前执行的可能,因此其价值通常要高于相应的欧式期权。遗憾的是,我们还没有办法得到美式期货期权的解析定价公式,只能利用诸如二叉树等数值方法得到其近似价格。

对于美式股指期货期权的定价,我们可以像在例10.16中那样,构造二叉树,然后再沿二叉树倒推,得到期权的价格。但是有一点要注意,在每一个节点考虑是否要提前执行时,应以在每一个节点的期货价为基准,而不是以节点上的指数值为基准,因此构造出指数的二叉树之后,还要计算出每一个节点上相应的股指期货的价格。

本章小结

股票指数就是以某种数学方法求出的一种数字,是用于反映任何时候股票市场相对水平的一种指标。不同的股票指数有不同的计算方法,其中最常用的一种方法是加权平均算法,它比较好地反映了股票市场整体的运动情况。

股指期货是以股票指数为标的的期货,同商品期货及其他金融期货一样,股指期货也是为了满足投资者规避风险的要求而产生的。通过在股指期货上的交易,投资者可以消除他在股票组合投资上面临的系统风险。

股指期货合约的价值取决于其标的指数的值,每一个指数点被赋予一定的金额,股指期货采用现金结算而非实际交割的方式作为合约的履行方式。

除了可作为一种良好的套期保值工具之外,股指期货还具有其他一些投资优势。比如使投资者以很低的成本进行相当于高度分散化的股票组合投资,利用高杠杆率放大投资收益,极其方便地在股票市场进行做空交易等。利用股指期货可以很容易地实现短期国债和股票组合之间暂时的转换,或者也可以方便地调整股票组合的Beta值。

除了股指期货之外,股指期权以及股指期货期权也是对股票组合进行套期保值的重要工具。股票指数期权就以某种股票指数为标的的期权,同股指期货一样,股指期权也是以现金结算的。而股指期货期权是以股指期货作为期权的标的的,当作为期权标的的期货的到期日与期权到期日相同时,股指期货期权与股指期权的效果是相同的。

利用股指期权或股指期货期权可以对股票组合进行单边保值,即保值者在避免了股市往一个方向变动可能给他带来的损失的同时,还保留了股市往另一个方向变动可能给他带来的获利的机会。

由于股票指数是根据许多股票的价格计算得到的,这么多的股票都有可能发放红利,因此股指期权的定价可以参照按连续红利率支付红利的股票期权,用Black-Scholes公式的修正形式进行。

复习与思考

- 接例 10.1, 从 1991 年 1 月 1 日起, 该指数加入一个成分股 D, 当日 D 股票的价格为 50 元, 求新的除数。
- 接例 10.3, 从 1991 年 1 月 1 日起, 该指数加入一个成分股 D, 当日 D 股票的价格为 10 元, 求调整后的除数。
- 接例 10.13, 若基金经理希望将投资组合的 β 降低到 0.5, 应卖出多少份期货?
- 接例 10.13, 若基金经理希望将投资组合的 β 调高到 1.5, 应如何操作?
- 在 CBOE 交易的 S&P100 股指期权, 执行价为 500 点, 设当前指数值为 500 点, 估计指数波动率为 20%, 红利率为 4%, 无风险利率为 6%, 距离到期日还有 3 个月。求看涨期权的理论价值。
- 设 3 个月后到期的 S&P500 指数期货价为 1000 点, 同时到期的执行价为 950 点的 S&P500 指数期权(欧式)的看涨期权和看跌期权价分别为 65 点和 20 点, 无风险利率为 6%。问有没有套利机会? 若有, 如何套利?
- 已知指数当前值为 1000 点, 无风险利率 8%, 预计红利收益率 4%, 求 6 个月期该指数的期货价。
- 考虑基于 S&P500 股指期货的一个看涨期权和一个看跌期权, 它们都是美式期权。设指数当前值为 1200 点, 指数波动率为 20%, 预计指数红利收益率为 4%, 无风险利率为 6%, 距离到期日还有 3 个月。试用二叉树方法求期权的理论价值。

参考文献

- Fred D. Arditti, 1996, *Derivatives*, Harvard Business School Press.
- Daniel R. Siegel and Diane F. Siegel, 1990, *Futures Markets*, The Dryden Press.
- [美]约翰·马歇尔、维普尔·班塞尔, 1998,《金融工程》, 宋逢明、朱宝宪、张陶伟译, 清华大学出版社。
- [英]洛伦兹·格利茨, 1998,《金融工程学》, 唐旭等译, 经济科学出版社。

第11章

外汇期货和期权

随着市场的全球化,外汇早已不仅仅是金融机构或进出口企业所接触的事物,对外汇风险进行管理也成了许多企业和投资者的迫切需要了。本章将介绍在外汇风险管理中的有效工具:外汇期货与期权。

11.1 外汇期货和远期合约

11.1-1 外汇及汇率

外汇,即国外汇兑,本意是由于国际间的债权债务结算所引起的货币兑换行为。外汇主要是指外国货币,同时还包括以外国货币表示的用以进行国际结算的支付手段(包括政府公债、国库券、公司债券、股票、银行存款凭证等等)。

一般来说,在国际外汇市场上交易的外汇是指可以自由兑换的货币。目前交易量比较大的品种主要有:美元、欧元、日元、英镑等。由于不同货币之间兑换的比率(即汇率)不是确定不变的,使得银行及其客户有必要经常地调整它们的外汇头寸而进行外汇交易,同时,在外汇市场上也会有许多投机者在汇率的变动上面进行赌博以求获利。

与传统的股票交易在特定的交易所进行的模式有所不同,外汇交易在全世界同时进行。国际上很多所谓的外汇市场实际上并没有一个固定的交易场所,比如伦敦外汇市场就是一个典型的无形市场,数百家参与外汇交易的外汇银行机构都有各自的交易室和联络设备,通过电信连接完成交易,它们共同组成了伦敦的外汇市场。在几乎所有的国际金融中心都有外汇市场的存在,比较重要的主要有伦敦、纽约、东京、新加坡、法兰克福、苏黎士、香港、巴黎、悉尼等,其中,伦敦和纽约的交易量分别占全世界外汇交易量的约30%和15%。据国际清算银行(Bank for International Settlements)2001年4月的调查估计,全球每日外汇交易总量约为1.2万亿美元,其中,涉及到美元、欧元、日元、英镑四种货币的交易占总交易量的80%以上。如此巨大的交易量说明外汇市场的流动性相当好,几种主要货币之间的兑换是非常方便的。

汇率是指不同货币兑换时的比率,表示一种货币的一个单位能换取多少个单位的另一种货币,又称汇价,即外汇的买卖价格。它是两国货币的相对比价,也就是用一国货币表示另一国货币的价格。

在浮动汇率制下,不同货币之间的汇率由它们之间的供求关系决定,影响两种货币之间的供求关系的因素主要有:

(1) 物价水平。物价水平低的国家,一个单位的货币可以买到比较多的商品,其货币相对来说就比较有价值;物价水平高的国家,一个单位的货币只能买到比较少的商品,其货币相对来说价值就比较小。

(2) 通货膨胀。国内外通货膨胀的差异是决定汇率长期趋势的主导因素。如果一国通货膨胀高于他国,该国货币在外汇市场上就会趋于贬值;反之,就会趋于升值。

(3) 利率。如果一国利率水平相对高于他国,就会刺激国外资金流入,由此提高本国货币在外汇市场上的汇率;反之,如果一国的利率水平相对低于他国,则会导致资金外流,本国货币在外汇市场上不受欢迎。

(4) 经济增长。国内外经济增长的差异对汇率的影响是多方面的。经济的增长,国民收入的增加意味着购买力的增强,由此会带来进口的增加;经济增长同时还意味着生产率的提高,产品竞争力的增加,对进口商品需求的下降。另外经济增长也意味着投资机会的增加,有利于吸引外国资金的流入,改善资本账户。从长期看,经济的增长有利于本币币值的稳中趋升。

(5) 市场预期。国际金融市场的游资数额巨大,这些游资对世界各国的政治、军事、经济状况具有高度敏感性,由此产生的预期支配着游资的流动方向,对外汇市场形成巨大冲击,预期因素是短期内影响外汇市场的最主要因素。

(6) 政府干预。各国货币当局为了使汇率维持在政府所期望的水平上,会对外汇市场进行直接干预,以改变外汇市场的供求状况,这种干预虽然不能从根本上改变汇率的长期趋势,但对外汇的短期走势仍有重要影响。

汇率可以用以下两种方法进行标价:

(1) 直接标价法。

直接标价法是以一定单位的外国货币(1个或100、1 000个单位)能换取多少单位的本国货币的形式表示。也就是说,在直接标价法下,汇率是以本国货币表示的每单位外国货币的价格。

例如,在中国,以人民币为本币,1美元=7.9人民币元,美元的汇率用“7.9人民币元/美元”表示;在美国,以美元为本币,1英镑=1.5美元,英镑的汇率用“1.5美元/英镑”表示。若汇率按这种形式表示就称为直接标价法。

在这种标价法下,外汇汇率上升,说明外币币值上涨,本币币值下降;外汇汇率下降,说明外币币值下跌,本币币值上升。

(2) 间接标价法。

间接标价法是以一定单位的本国货币(1个或100、1 000个单位)能换取多少单位的外国货币的形式表示。在间接标价法下,汇率是以外国货币来表示的每单

位本国货币的价格。

例如,在英国,以英镑为本币,1 英镑=1.5 美元,美元的汇率用“1.5 美元/英镑”表示;在美国,以美元为本币,1 美元=1.6 德国马克,德国马克的汇率用“1.6 马克/美元”表示。若汇率按这种形式表示就称为间接标价法。

若是用间接标价法表示的外汇汇率上升,则说明外币币值下跌,本币币值上升;外汇汇率下降,则说明外币币值上涨,本币币值下降。

目前只有英国和美国等少数国家使用间接标价法。世界上大多数国家采用直接标价法,我国也采用直接标价法。

从直观理解的角度来看,直接标价法更易于理解,它把外汇看作一种金融商品,与其他的金融商品的价格一样,外汇这种金融商品的价格,即汇率,是以本国货币的形式来表示的。下面如果不特别说明的话,出现的汇率均以直接标价法表示。

在国际外汇市场上,大多数货币的汇率都是以与美元的比价进行报价的。但在实践中,许多交易是在两种非美元的货币之间进行的,这种交易在国际外汇交易中也是重要的组成部分,比如一个英国的进口商可能需要直接用英镑购买日元,那么,他用英镑购买日元时使用的汇率,即英镑对日元的汇率,有时候也称为交叉汇率(cross rate),这个汇率必须与利用英镑对美元的汇率和日元对美元的汇率计算得到的汇率一致。比如当英镑对美元的汇率为 1.5(美元/英镑),日元对美元的汇率为 110(日元/美元)时,则英镑对日元的交叉汇率一定是 165(日元/英镑),否则的话,就会有套利机会出现。由于国际外汇市场的交易非常活跃,市场的效率很高,一旦不同货币之间的汇率出现不平衡,有套利机会出现,马上就会被发现和利用,不平衡的汇率迅速发生变化,套利机会很快就会消失,不同货币之间的汇率会达到一种平衡的状态。

11.1-2 远期外汇交易

直接标价法和间接标价法只是表示的方法不同,它们表示的意义是相同的,就好比卖苹果的对你说 10 元钱 5 斤,你可以理解为 1 斤 2 元钱一样,它们的实质是完全相同的。但汇率本身还有两种不同的形式,即即期汇率(spot exchange rate)和远期汇率(forward exchange rate),它们具有不同的含义。即期汇率是指立即支付和交割的某种货币的汇率,比如美元对德国马克的即期汇率为 1.46(马克/美元),表示现在可以以 1.46 马克的价格购买或出售 1 美元。远期汇率是指成交后延期交割的现行汇率。远期汇率的表示方法和即期汇率一样,但是必须加上延期的时间,例如 3 个月期美元对马克的远期汇率为 1.45(马克/美元),表示现在可以确定在 3 个月后以 1.45 马克的价格购买或出售 1 美元。

如果一种货币的远期汇率高于即期汇率,则其间的差称为远期升水(forward premium),若一种货币的远期汇率低于即期汇率,则其间的差称为远期贴水(forward discount)。上面所说的美元对马克的汇率,远期汇率低于即期汇率,即美元对马克远期贴水。

在大多数的金融市场中,投资者想要锁定未来的收益或成本往往使用期货合约,而不是远期合约,期货的交易量往往远大于远期的交易量。然而在外汇市场中,期货却并不是在确定未来价格的合约中占绝对主导地位的,期货市场起的作用与远期市场起的作用差不多,事实上,外汇远期的交易量还高于外汇期货的交易量。外汇远期市场和外汇期货市场同时存在的原因是它们有完全不同的客户,远期市场是为大的商业用户和机构交易者服务的,而期货市场则是为小的商业用户和投机者服务的。由于两个市场之间通过套利关系的联系,远期价格和期货价格是保持高度一致的,期货市场的交易者也可充分享受巨大的远期市场所具有的高流动性带来的好处。

远期外汇市场和即期外汇市场是合而为一的,许多外汇银行机构在提供即期外汇交易服务的同时也提供远期外汇交易的服务,远期交易和即期交易在同一个电信网络上进行。

由于是远期合约而不是期货合约,合约的规模和到期期限可以根据特定客户的需求而制定。但尽管如此,事实上在远期外汇市场上交易的通常都是大面额的合约,甚至更进一步,有一些合约已经在外汇远期市场上成为事实上的市场标准,这些合约的报价每天都被公布。外汇交易商们以这些合约的价格为基准确定其他有关交易的价格。

远期合约和期货合约的交易及结算过程的差异也是造成它们拥有不同的客户的原因。期货市场采用清算所和保证金制度来防范违约风险,但远期市场没有清算所和保证金制度,远期合约的交易商必须考察它们的客户的信用等级,并对客户的信用设定要求。这一系统对具有高信用度的大客户是有利的,只有它们才有资格参与远期市场的交易。另外,远期合约取消头寸的操作远比期货合约取消头寸麻烦,但是,对希望持有头寸一直到到期的交易者来说,远期合约的吸引力要大一些。事实上,在外汇远期交易中,90%的合约是到期交割的,而在外汇期货交易中,只有不到1%的合约是到期交割的。

后面我们将主要讨论外汇期货市场及其交易,但所涉及的无套利定价和交易策略等,对外汇远期市场中的交易同样是可以适用的。

11.1-3 外汇期货合约

作为一种金融期货品种,外汇期货交易也是在规范的期货交易所内进行的。一个主要的外汇期货交易市场是在CME的国际货币市场(IMM, International Monetary Market),主要以美元为基础进行报价,交易的外汇期货品种主要有:欧元、日元、瑞士法郎、加拿大元、英镑、墨西哥比索、澳大利亚元等,此外还有欧元对日元、瑞士法郎和英镑等一些交叉货币期货。

在即期和远期外汇市场上,美元对大多数货币采用间接标价法,即以1美元等于若干其他货币单位的方式进行报价,但是在外汇期货市场上,以美元表示的外汇期货则采用直接标价法,即以一个单位的其他货币等于若干单位美元的方式进行

报价。比如美元对加拿大元的远期报价为 1.600 0(加拿大元/美元), 则相应的期货报价为 0.625 0(美元/加拿大元)。表 11.1 是在 CME 交易的部分外汇期货的一些指标。

表 11.1 CME 部分外汇期货合约的规模和报价

期货品种	合约规模	报价最小变动
英 镑	62 500 英镑	0.000 2 即每合约 \$12.5
欧 元	125 000 欧元	0.000 1 即每合约 \$12.5
日 元	12 500 000 日元	0.000 001 即每合约 \$12.5
瑞士法郎	125 000 瑞士法郎	0.000 1 即每合约 \$12.5
加拿大元	100 000 加拿大元	0.000 1 即每合约 \$10.0

与股指期货只能以现金交割不同, 外汇期货合约到期时是可以以实物交割的, 即把两种货币进行交换。无论在现货还是期货市场上, 外汇交易通常有两天的交割期。在 CME 的国际货币市场上, 外汇期货合约的到期月是每年的 3、6、9、12 月, 最后交易日是到期月的第三个星期三之前的两个工作日, 而最后交割日是最后交易日之后的两天。例如 2001 年 12 月到期的外汇期货合约, 其最后交易日是 2001 年 12 月 17 日(星期一), 但最后交割日是 12 月 19 日(星期三)。在我们讨论期货价格或远期汇率时, 通常是以实际交割日为基准的, 即我们所说的到期日通常是指期货最后交易日之后的两天。

11.1-4 利率平价关系

前面我们提到过两国货币之间的汇率与两国利率之间的关系, 利率高的货币会吸引外国资金流入, 从而提高该货币在国际外汇市场上的汇率, 但这只是指即期汇率。对于远期汇率, 由于存在套利的关系, 利率越高的货币, 其远期汇率反而越低。

比如美元对日元, 美元的利率比日元的利率高, 如果即期汇率和远期汇率相等的话, 就会有套利机会, 投资者都想把日元换成美元进行投资, 甚至借日元换成美元进行投资, 因此在即期外汇市场上, 美元供不应求, 日元供大于求, 美元对日元的汇率上升。但是投资结束以后, 投资者要把美元换回日元, 当初借日元的投资者要把美元换回日元去归还贷款, 为了避免汇率变动产生的风险, 这些投资者会希望通过在远期或期货市场上购买远期的日元, 出售远期美元来锁定将来的汇率, 因此在远期外汇市场上, 美元供大于求, 日元供不应求, 美元对日元的汇率下降。美元对日元的汇率即期上升, 远期下降的结果是远期汇率低于即期汇率, 一直到借日元换美元进行投资, 再换回日元归还贷款的套利活动无利可图, 套利机会消失, 远期汇率和即期汇率达到某种平衡状态, 即满足所谓的利率平价关系。

下面我们利用无套利定价方法讨论远期汇率与两国利率之间的关系。

设美元为本币, 在 t 时刻, 某种外汇 A 货币对美元的即期汇率为 $S(\text{美元}/A)$,

在 T 时刻到期的 A 货币的期货价格为 F (美元/A), 并设 t 到 T 期间本币(美元)的无风险利率为 r , 外汇(A 货币)的无风险利率为 r_f , 我们考虑以下两种投资方案:

方案 1: 在 t 时刻, 将 1 美元按无风险利率进行投资, 则在 T 时刻得到 $e^{r(T-t)}$ 美元。

方案 2: 在 t 时刻, 将 1 美元换成 $1/S$ 单位的 A 货币, 按无风险利率进行投资, 预计在 T 时刻得到 $e^{r_f(T-t)}/S$ 单位的 A 货币; 同时, 在 t 时刻, 按远期汇率 F (即期货价格)出售 T 时刻到期的面值为 $e^{r_f(T-t)}/S$ 单位 A 货币的期货合约, 则在 T 时刻可以得到 $Fe^{r_f(T-t)}/S$ 美元。

两个方案均为无风险投资, 投资额相同, 因此它们的结果也应该相同, 否则就会有套利机会, 所以:

$$e^{r(T-t)} = Fe^{r_f(T-t)}/S$$

或者表示为:

$$F = Se^{(r-r_f)(T-t)} \quad (11.1)$$

这就是即期汇率和远期汇率之间的利率平价关系。当某种外汇的利率 r_f 高于本币利率 r 时, 该外汇的远期汇率低于即期汇率, 该外汇远期贴水, 利率相差越大, 期限越长, 则远期贴水越多; 当某种外汇的利率 r_f 低于本币利率 r 时, 该外汇的远期汇率高于即期汇率, 该外汇远期升水, 利率相差越大, 期限越长, 则远期升水越多。

(11.1)式中的利率是以连续复利的形式表示的, 如果利率以到期收益率的形式表示的话, 即期汇率和远期汇率之间的利率平价关系可表示为:

$$\frac{F}{S} = \frac{1+R}{1+R_f} \quad (11.2)$$

其中, R 和 R_f 分别表示在 t 到 T 期间本币和外汇的到期收益率。

例 11.1 设美元对英镑的即期汇率为 1.5, 美元的无风险利率为 3%, 英镑的无风险利率为 5%, 均按每年复利一次计算, 求两年期美元对英镑的远期利率。

根据题意, $S = 1.5$, $T-t = 2$, $r = \ln(1.03) = 0.02956$, $r_f = \ln(1.05) = 0.04879$, 按(11.1)式计算得:

$$F = 1.5 \times e^{(0.02956-0.04879) \times 2} = 1.4434$$

若按(11.2)式计算, 有: $S = 1.5$, $R = 1.03^2 - 1 = 0.0609$, $R_f = 1.05^2 - 1 = 0.1025$, 可得:

$$F = 1.5 \times \frac{1+0.0609}{1+0.1025} = 1.4434$$

与按(11.1)式计算得到的结果完全相同。可见(11.1)式和(11.2)式是等价的, 只不过对利率的表示方法不同, 具体应用时应加以注意。

11.2 外汇期货交易策略

11.2-1 期货套期保值

像其他的金融期货和商品期货一样,外汇期货可用于套期保值,在这里,进行套期保值的目的是规避与汇率波动有关的风险。我们在上面讨论远期汇率的时候,实际上已经涉及到这一问题了:我们提到当美元的利率比日元高,投资者借日元投资于美元,为了确保投资结束后能将美元按确定的汇率换回日元用于归还贷款,要出售远期美元,购买远期日元,这实际上就是利用外汇的远期或期货合约进行套期保值。

在很多情况下,企业的收益存在汇率风险。例如,在美国,一个接受外汇收入的出口企业会面临美元升值(外汇贬值)的风险,因为美元升值会使它收到的外汇只能换到较少的美元。这样的企业可以通过持有它将要收到的外汇的期货空头头寸来对冲美元升值带来的风险。这种持有期货空头头寸的套期策略称为空头套期保值(short hedge)。

相似地,在很多情况下,企业的支出也存在汇率风险。例如,对于一个需要为它的进口原料而支付外汇的美国企业来说,它面临美元贬值(外汇升值)的风险,因为美元贬值会使它需要用更多的美元来支付进口原料的成本。为此,它可以通过持有外汇的期货多头头寸来对冲美元贬值带来的风险。这种持有期货多头头寸的套期策略称为多头套期保值(long hedge)。

例 11.2 假设在 8 月 20 日,一个美国公司同意在 12 月 20 日以每辆 20 万日元的价格向一家日本公司购买 10 万辆摩托车。公司担心在购买日之前美元可能会贬值,会增加支出,于是决定持有 12 月 20 日到期的日元期货多头头寸进行套期保值,以避免美元贬值带来的损失。

设在 8 月 20 日,日元的汇率为 120.15(日元/美元),即 0.008 323(美元/日元),日元无风险利率为 1%,美元无风险利率为 3%,均按连续复利计算。按利率平价关系,12 月 20 日到期的日元期货的价格(远期汇率)应为:

$$0.008 323 \times e^{(3\% - 1\%) \times 4/12} = 0.008 379(\text{美元 / 日元})$$

不管是即期汇率还是远期汇率,银行报出的总是有出价和要价(bid & ask),出价表示银行愿意以此价格购买外汇,要价表示银行愿意以此价格出售外汇,出价(bid)总是比要价(ask)低一些。而上述的汇率则是一个理论上的概念,在实践中,我们可以按银行报的两个价格的平均值来进行估计,我们不妨把这一理论上存在的汇率称为中间价。公司要购买日元的话,要按照银行报的要价购买,设银行报的即期和远期日元汇率的要价分别比中间价高 0.000 003 和 0.000 005(美元/日元)。

公司在 12 月 20 日需要的日元为:

$$20 \text{ 万} \times 10 \text{ 万} = 200 \text{ 亿(日元)}$$

每一份日元期货合约的标的为 1 250 万日元,因此公司作套期保值需要:

$$200 \text{ 亿} / 1 250 \text{ 万} = 1 600$$

即 1 600 份日元期货合约。公司要进行多头套期保值,其购买期货的价格为 0.008 384。

下面我们看在不同情况下,公司为这批进口摩托车支付的实际成本。

情况 1:美元贬值,在 12 月 20 日,实际汇率为 106.70(日元/美元),即 0.009 372(美元/日元),银行报的即期日元要价为 0.009 375(美元/日元),期货的到期价格等于现货价格,因此期货的结算价格为 0.009 372(美元/日元)。

此时,为了兑换 200 亿日元用于支付货款,需要的美元为:

$$200 \times 0.009 375 = 1.875 0(\text{亿美元})$$

而在期货交易中,获利:

$$\begin{aligned} (0.009 372 - 0.008 384)(\text{美元} / \text{日元}) \times 1 250(\text{万日元}) \times 1 600 \\ = 0.197 6(\text{亿美元}) \end{aligned}$$

因此,实际支付的成本为:

$$1.875 0 - 0.197 6 = 1.677 4(\text{亿美元})$$

情况 2:美元升值,在 12 月 20 日,实际汇率为 144.80(日元/美元),即 0.006 906(美元/日元),银行报的即期日元要价为 0.006 909(美元/日元),期货的到期价格等于现货价格,因此期货的结算价格为 0.006 906(美元/日元)。

此时,为了兑换 200 亿日元用于支付货款,需要的美元为:

$$200 \times 0.006 909 = 1.381 8(\text{亿美元})$$

而在期货交易中,获利:

$$\begin{aligned} (0.006 906 - 0.008 384)(\text{美元} / \text{日元}) \times 1 250(\text{万日元}) \times 1 600 \\ = -0.295 6(\text{亿美元}) \end{aligned}$$

即损失 0.295 6 亿美元,因此,实际支付的成本为:

$$1.381 8 + 0.295 6 = 1.677 4(\text{亿美元})$$

可见,不管美元升值还是贬值,公司支付的实际成本保持不变。实际上,经套期保值以后,公司支付的成本可直接按远期汇率进行计算,但是考虑到公司实际上两次购买日元^①(一次期货,一次现货)都是以高出中间价的银行要价购买的,因此

^① 在本例中,公司在期货到期时也可选择等待实物交割,这样公司就不需要在日元现货市场上购买日元,避免了一次支付中间价和银行要价之间的差价,降低了实际成本。但是在实践中,套期保值期限和期货合约到期日完全匹配的情况不多,应用期货合约进行套期保值一般都是期货和现货市场分别进行操作,然后再以期货操作中的盈亏对冲现货市场价格变化带来的风险。因此在本例中,仍采用期货和现货市场分别进行操作的方式来进行计算。

要加上其间的差价,现货差价 0.000 003,期货差价 0.000 005,所以得:

$$\begin{aligned} 200(\text{亿日元}) \times (0.008 379 + 0.000 003 + 0.000 005) (\text{美元 / 日元}) \\ = 1.677 4(\text{亿美元}) \end{aligned}$$

11.2-2 自然套期保值

上述例子中,公司利用期货合约进行套期保值,锁定了购买日本摩托车的成本,很好地消除了汇率风险。在实践中,还有另一个办法也可以解决公司的这一风险管理问题,就是自然套期保值(natural hedge)。下面我们对此方法作一介绍。

在作多头套期保值时,需要购买期货合约,以便用期货交易中的盈亏对冲现货价格变化引起的结果的不确定性。在讨论期货定价的时候,我们知道,一份现货资产等于一份无风险资产加上一份期货的多头头寸,那么一份期货的多头头寸也就等于一份现货资产加上一份无风险资产的空头头寸,即用现货资产和无风险资产可以合成期货头寸:

$$\text{合成期货多头头寸} = \text{现货资产} - \text{无风险资产}$$

因此,上述摩托车进口企业可以通过借美元并立刻购买日元的方法进行保值,这就是自然套期保值的方法,不需要用到期货头寸。自然套期保值的步骤如下:

(1) 决定需要多少日元。由于立刻购买日元,得到的日元可以按无风险利率投资,现在需要的日元数额为:

$$Y_t = Y_T e^{-R_Y(T-t)}$$

其中, t 为套期保值期初时刻, T 是套期保值结束时刻, Y_T 是 T 时刻需要的日元, R_Y 是日元的无风险利率。

(2) 决定需要借多少美元。由于是立刻购买日元,所以按即期汇率计算:

$$U_t = Y_t \times S$$

其中, U_t 是现在需要借的美元数额, S 是日元的即期汇率,按直接标价法表示。

(3) 计算实际成本。由于购买行为是在 T 时刻进行,因此以归还美元贷款的实际支出作为实际成本:

$$U_T = U_t e^{R_U(T-t)}$$

其中, R_U 是美元的无风险利率。

所以,按自然套期保值,最后的实际成本为:

$$U_T = Y_T S e^{(R_U - R_Y)(T-t)}$$

例 11.3 同例 11.2,该公司决定使用自然套期保值方法。试计算其最后的实际成本。

首先,在 12 月 20 日公司需要 200 亿日元,日元的无风险利率为 1%,但这是对

银行来说的,对公司来说,它的无风险投资利率会略低于这一数值。设公司的无风险投资利率比银行无风险利率低0.1%,即为0.9%,则在8月20日应购买日元数额为:

$$200 \times e^{-0.9\% \times 4/12} = 199.40(\text{亿日元})$$

按即期汇率中间价0.008323(美元/日元),购买日元时用的汇率为银行要价0.008326(美元/日元),所以,需要美元贷款额为:

$$199.40 \times 0.008326 = 1.6602(\text{亿美元})$$

美元的无风险利率为3%,但同样这是对银行来说的,对公司来说,它的无风险贷款利率会略高于这一数值。设公司的无风险贷款利率比银行无风险利率高0.2%,即为3.2%,这笔美元贷款到期要偿付的本息和为:

$$1.6602 \times e^{3.2\% \times 4/12} = 1.6780(\text{亿美元})$$

与例11.2中用期货进行套期保值的结果1.6774亿美元比较,实际成本上升约6万美元。

从上述两个例子看,似乎自然套期保值的结果比期货保值要差一些,但实际上,这并不是必然的。事实上,两者的差来源于采用不同交易策略的交易费用(此处我们所说的交易费用仅考虑买卖价差,忽略佣金等其他费用)的不同。在期货保值策略中,主要是购买外汇期货和现货时支付的价差,在自然套期保值中,主要是购买外汇现货时支付的价差和投、融资时的利率差。下面我们用符号表示在两种策略下,考虑交易费时的实际成本。

期货套期保值策略下:

$$U_T^F = Y_T \cdot (K + d_S + d_K) = Y_T \cdot [Se^{(R_U - R_Y)(T-t)} + d_S + d_K] \quad (11.3)$$

其中, d_S 和 d_K 分别是即期汇率和远期汇率银行报的要价与中间价的差。

自然套期保值策略下:

$$\begin{aligned} U_T^N &= Y_T \cdot (S + d_S) \cdot e^{(R_U + d_U) - (R_Y - d_Y)(T-t)} \\ &= Y_T \cdot (S + d_S) \cdot e^{(R_U - R_Y)(T-t)} \cdot e^{(d_U - d_Y)(T-t)} \end{aligned} \quad (11.4)$$

其中, d_U 和 d_Y 分别是公司的美元贷款利率和日元投资利率与无风险利率之间的差。

U_T^F 和 U_T^N 哪个大取决于 d_S 、 d_K 、 d_U 和 d_Y 这些差价的大小:

当 $Se^{(R_U - R_Y)(T-t)} + d_S + d_K < (S + d_S) \cdot e^{(R_U - R_Y)(T-t)} \cdot e^{(d_U + d_Y)(T-t)}$ 时, $U_T^F < U_T^N$,采用期货套期保值策略的最终成本较低;

当 $Se^{(R_U - R_Y)(T-t)} + d_S + d_K > (S + d_S) \cdot e^{(R_U - R_Y)(T-t)} \cdot e^{(d_U + d_Y)(T-t)}$ 时, $U_T^F > U_T^N$,采用自然套期保值策略的最终成本较低。

这两种情况都是有可能的。一般来说,在利率比较低,距到期时间比较近的

情况下,采用自然套期保值策略的最终成本可能会低一些;反之,在利率比较高,距到期时间比较远的情况下,采用自然套期保值策略的最终成本就可能会相对高一些。

11.2-3 交叉汇率期货合约的合成

在上面的讨论中,我们只涉及到以美元为本币来标价的期货,所有的交易都涉及到美元,包括现货和期货。事实上,在国际外汇市场的交易中,不管是现货还是期货,涉及美元的交易也确实是最活跃的。美元期货可用于对各种外汇汇率的变化进行套期保值,但有时候我们也会面临一些交叉汇率的风险,我们希望有期货合约可供我们来进行套期保值。我们前面提到,在CME的国际货币市场,有欧元对英镑、日元等的交叉汇率期货的交易,但这些期货的交易不如以美元为本币的外汇期货交易活跃,而且,对很多的交叉汇率并不存在期货交易。下面我们介绍如何用以美元为本币的外汇期货来合成交叉汇率期货合约。

交叉汇率期货的合成与交叉汇率本身的形式有相似之处,某两种货币之间的交叉汇率必须与根据这两种货币对美元的汇率计算得到的一个合成汇率相一致,这一关系不但对即期汇率成立,对远期汇率(即交叉汇率期货的价格)同样也成立。

例如,设在 t 时刻:

A货币对美元的即期汇率为 S_A (美元/A),无风险利率为 R_A ;

B货币对美元的即期汇率为 S_B (美元/B),无风险利率为 R_B ;

A货币对B货币的即期汇率为 S_{AB} (B/A),美元无风险利率为 R 。

则, S_A, S_B, S_{AB} 之间应存在如下关系:

$$S_{AB} = S_A / S_B \quad (11.5)$$

再设:

T 时刻到期的A货币对美元的远期汇率为 K_A (美元/A);

T 时刻到期的B货币对美元的远期汇率为 K_B (美元/B);

T 时刻到期的A货币对B货币的远期汇率为 K_{AB} (B/A)。

根据利率平价关系,有:

$$K_A = S_A e^{(R - R_A)(T-t)} \quad (11.6)$$

$$K_B = S_B e^{(R - R_B)(T-t)} \quad (11.7)$$

$$K_{AB} = S_{AB} e^{(R_B - R_A)(T-t)} \quad (11.8)$$

可见,

$$K_{AB} = K_A / K_B \quad (11.9)$$

两种货币之间的远期交叉汇率可以直接用它们对美元的远期汇率计算得到。交叉汇率期货合约也可以用这两种货币对美元的外汇期货合约来合成。为

了便于说明,我们对例 11.2 稍作修改,结合例子对交叉汇率期货的合成进行介绍。

例 11.4 假设在 8 月 20 日,一个英国公司同意在 12 月 20 日以每辆 20 万日元的价格向一家日本公司购买 10 万辆摩托车。公司担心在购买日之前英镑对日元的汇率可能会发生变化,英镑可能会贬值,会提高支出,于是决定利用期货合约进行套期保值,以避免英镑贬值带来的损失。由于没有直接的英镑对日元的交叉汇率期货合约,公司利用在 CME 的国际货币市场上交易的日元期货和英镑期货合约来合成英镑对日元的交叉汇率期货合约。

设在 8 月 20 日,日元的汇率为 0.008 323(美元/日元),英镑的汇率为 1.426 0(美元/英镑),日元无风险利率为 1%,英镑无风险利率为 5%,美元无风险利率为 3%,均按连续复利计算。

根据无套利原则,英镑与日元之间的汇率应为:

$$1.426 2 / 0.008 323 = 171.36(\text{日元} / \text{英镑})$$

或 $0.008 323 / 1.426 2 = 0.005 836(\text{英镑} / \text{日元})$

按利率平价关系:

12 月 20 日到期的日元期货的价格(远期汇率)应为:

$$0.008 323 \times e^{(3\% - 1\%) \times 4.12} = 0.008 379(\text{美元} / \text{日元})$$

12 月 20 日到期的英镑期货的价格(远期汇率)应为:

$$1.426 2 \times e^{(3\% - 5\%) \times 4.12} = 1.416 7(\text{美元} / \text{英镑})$$

12 月 20 日到期的英镑与日元之间的远期汇率应为:

$$0.008 379 / 1.416 7 = 0.005 914(\text{英镑} / \text{日元})$$

注意,以上所有的汇率都是我们在前面所说的中间价,公司要购买外汇,就要以比中间价略高的银行要价购买,公司要出售外汇,就要以比中间价略低的银行报价出售。设公司购买 12 月 20 日到期的日元期货适用的远期汇率为 0.008 384(美元/日元),公司出售 12 月 20 日到期的英镑期货适用的远期汇率为 1.416 2(美元/英镑)。

公司为了得到 200 亿日元需要购买的日元期货为:

$$200(\text{亿}) / 1 250(\text{万}) = 1 600(\text{份})$$

为此它到时需要的美元数额为:

$$0.008 384 \times 200 = 1.676 8(\text{亿美元})$$

为了得到这些美元,它需要出售的英镑数额为:

$$1.676 8 / 1.416 2 = 1.184 0(\text{亿英镑})$$

为此它需要出售的英镑期货为:

$$1.1840(\text{亿}) / 6.25(\text{万}) = 1894.4(\text{份})$$

也就是说,这个英国公司为了锁定 4 个月后的 200 亿日元支出的英镑成本,需要购买 4 个月后到期的 1 600 份日元期货,同时出售 4 个月后到期的 1 894 份英镑期货,这些期货都是在 CME 的国际货币市场上交易的,是以美元为本币计算盈亏的。

下面我们考察以下各种情况:

情况 1: 日元和英镑都升值,在 12 月 20 日,日元的汇率 0.009 372(美元/日元),英镑的汇率为 1.527 6(美元/英镑),则日元对英镑的汇率为 0.006 135(英镑/日元)。

情况 2: 日元升值,英镑贬值,在 12 月 20 日,日元的汇率 0.009 372(美元/日元),英镑的汇率为 1.323 0(美元/英镑),则日元对英镑的汇率为 0.007 084(英镑/日元)。

情况 3: 日元贬值,英镑升值,在 12 月 20 日,日元的汇率 0.006 906(美元/日元),英镑的汇率为 1.527 6(美元/英镑),则日元对英镑的汇率为 0.004 521(英镑/日元)。

情况 4: 日元和英镑都贬值,在 12 月 20 日,日元的汇率 0.006 906(美元/日元),英镑的汇率为 1.323 0(美元/英镑),则日元对英镑的汇率为 0.005 220(英镑/日元)。

以上各种汇率仍是所谓的中间价,公司要购买或出售外汇,仍要承担一定的价差。设公司在这几个汇率上要承担的价差分别为 0.000 003(美元/日元),0.000 3(美元/英镑)和 0.000 003(英镑/日元)。但因期货已到期,计算期货盈亏仍适用上述中间价进行结算。

在情况 1 的条件下,公司以 0.006 138(英镑/日元)的汇率用英镑购买 200 亿日元,花费:

$$200 \times 0.006 138 = 1.227 6(\text{亿英镑})$$

在日元期货合约中的盈亏为:

$$(0.009 372 - 0.008 384) \times 1 250(\text{万}) \times 1 600 = 0.197 6(\text{亿美元})$$

在英镑期货交易中的盈亏为:

$$(1.416 2 - 1.527 6) \times 6.25(\text{万}) \times 1 894 = -0.131 9(\text{亿美元})$$

在期货交易中的盈亏合计为 0.065 7 亿美元。

这些美元要用英镑去购买,此时英镑兑美元适用的汇率为 1.527 9(美元/英镑),因此,以英镑计,期货交易中的盈亏合计为:

$$0.065 7 / 1.527 9 = 0.043 0(\text{亿英镑})$$

所以,实际成本为:

$$1.227 6 - 0.043 0 = 1.184 6(\text{亿英镑})$$

表 11.2 列出了在各种情况下,公司为得到 200 亿日元所花费的实际成本。

表 11.2 各种情况下经套期保值后的实际成本

	情况 1	情况 2	情况 3	情况 4
日元汇率(美元/日元)	0.009 372	0.009 372	0.006 906	0.006 906
英镑汇率(美元/英镑)	1.527 6	1.323 0	1.527 6	1.323 0
日元对英镑的汇率(英镑/日元)	0.006 135	0.007 084	0.004 521	0.005 22
现货市场要价(英镑/日元)	0.006 138	0.007 087	0.004 524	0.005 223
200 亿日元成本(亿英镑)	1.227 6	1.417 4	0.904 8	1.044 6
日元期货盈亏(亿美元)	0.197 6	0.197 6	-0.295 6	-0.295 6
英镑期货盈亏(亿美元)	-0.131 9	0.110 3	-0.131 9	0.110 3
期货盈亏合计(亿美元)	0.065 7	0.307 9	-0.427 5	-0.185 3
适用英镑与美元的汇率(美元/英镑)	1.527 9	1.323 3	1.527 3	1.322 7
期货盈亏合计(亿英镑)	0.043 0	0.232 7	-0.279 8	-0.140 0
实际成本(亿英镑)	1.184 6	1.184 7	1.184 6	1.184 6

可见,若不作套期保值,在 12 月 2 日购买 200 亿日元所需的成本介于 0.904 8 和 1.417 4 亿英镑之间,而经套期保值之后,实际成本在 1.184 6 到 1.184 7 亿英镑之间,大大提高了结果的确定性,是一个很成功的策略。

在理论上,期货的套期保值可以做到使结果完全确定,但在实践中,有以下因素使实际结果偏离完美的套期保值:

- (1) 市场买卖价差:公司购买或出售外汇(包括现货和期货)要承担一定的汇率差。
- (2) 期货合约的规模:公司需要在将来兑换的外汇数额不是刚好等于期货合约规模的整数倍。
- (3) 采用合成交叉外汇期货合约时,最后的期货盈亏是以美元计的,这部分盈亏要兑换为另一种货币(如上例中的英镑)仍要承担一定的汇率差。

尽管如此,合成交叉外汇期货的套期保值效果仍然是非常好的,累计偏差仅万分之一左右。

对于需要用交叉汇率期货进行套期保值的情况,同样也可以用自然套期保值策略进行。

我们将上例改为自然套期保值策略进行说明。

例 11.5 同例 11.4,公司采用自然套期保值策略。

首先,在 12 月 20 日公司需要 200 亿日元,日元的无风险利率为 1%,但是对公司来说,它的无风险投资利率会略低于这一数值,设公司的无风险投资利率比银行无风险利率低 0.1%,即为 0.9%,则在 8 月 20 日应购买日元数额为:

$$200 \times e^{-0.9\% \times 4/12} = 199.40(\text{亿日元})$$

按即期汇率中间价 0.005 836(英镑/日元),购买日元时用的汇率为银行要价 0.005 839(英镑/日元),所以,需要英镑贷款额为:

$$199.40 \times 0.005839 = 1.1643(\text{亿英镑})$$

英镑的无风险利率为 5%，但对公司来说，它的无风险贷款利率会略高于这一数值，设公司的无风险贷款利率比银行无风险利率高 0.2%，即为 5.2%，这笔英镑贷款到期要偿付的本息和为：

$$1.1643 \times e^{5.2\% \times 4/12} = 1.1847(\text{亿英镑})$$

与例 11.4 中用期货进行套期保值的结果 1.1846 到 1.1847 亿英镑比较，基本相等。

实际上，跟我们在上一节讨论的一样，采用自然套期保值策略和采用期货保值策略，最终结果的差异取决于公司在外汇市场上买卖外汇的价差，以及它的投融资利率与无风险利率的差。

11.3 外汇期权

11.3-1 外汇期权及其定价

对于外汇风险管理来说，外汇远期及期货能让套期保值者确定将来交易的外汇的实际有效汇率，从而避免汇率变动带来的风险。但是这种方式的套期保值使保值者的最终结果确定，在避免了可能的损失的同时也失去了获利的机会。因为汇率的变动方向不是确定的，如果汇率下降会给投资者带来损失的话，汇率上升就很可能会给投资者带来收益，投资者在作套期保值的时候并不能肯定汇率一定会下降，因此使用期货或远期进行套期保值就失去了汇率上升可能带来的好处。而使用期权工具就显得比较灵活，因为外汇期权只对汇率的单向变动保值，也就是说，当汇率下降时，它可以使保值者避免损失，而在汇率上升时，它不起作用，不会限制保值者获利。当然，为了获得这些好处，保值者要付出一定的代价，即支付期权费。

费城股票交易所 (PHLX, Philadelphia Stock Exchange) 的联合货币期权市场 (UCOM, United Currency Options Market) 是世界上最主要的提供场内交易的外汇期权的市场之一。它从 1982 年开始外汇期权的交易，提供一系列的标准化和非标准化期权。其中，标准化期权按美元报价，作为期权标的的外汇品种有澳大利亚元、英镑、加拿大元、欧元、日元和瑞士法郎；非标准化期权也可称为交叉汇率期权，它可定义在以下任意两种货币之间：澳大利亚元、英镑、加拿大元、欧元、日元、墨西哥币、美元，以其中一种货币报价，另一种作为期权标的。

对于以美元报价的标准化期权同时提供欧式和美式的两种，而非标准的交叉汇率期权则只有欧式的。

表 11.3 是在 PHLX 的 UCOM 交易的标准化外汇期权的一些具体条款。

表 11.3 在 UCOM 交易的标准化外汇期权的一些具体条款

期权标的	澳大利亚元	英镑	加拿大元	欧元	瑞士法郎	日元
合约规模	50 000	31 250	50 000	62 500	62 500	6 250 000
期权费报价	美分/每单位					0.01 美分/每单位
期权费最小变动	\$.(00)01/每单位					\$.(0000)01/每单位
	\$ 5.00	\$ 3.125	\$ 5.00	\$ 6.25	\$ 6.25	\$ 6.25
失效日	月中期权(mid-month options): 到期月第三个星期三之前的星期五 月末期权(end-month options): 到期月的最后一个星期五					

非标准期权的规模取决于标的货币,其到期日可以与标准化期权相同,也可以不同。

与股指期权相比,外汇期权是一个更明显的按连续红利率支付红利的股票期权定价的应用。作为期权标的的那种外汇,可看作是一种金融资产,如果持有这种金融资产的话,可以作无风险投资,它的数额将按这种货币的无风险利率增长,与我们关于连续红利率支付红利的定义完全一致。因此欧式外汇期权的定价可以应用 B-S 公式进行,只要用外汇(即期权标的货币)的无风险利率代替红利率即可。具体公式为:

$$c = e^{-r_f(T-t)} SN(d_1) - e^{-r_f(T-t)} KN(d_2) \quad (11.10)$$

$$p = e^{-r_f(T-t)} KN(-d_2) - e^{-r_f(T-t)} SN(-d_1) \quad (11.11)$$

其中,

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r - r_f + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

式中,S 表示当前的即期汇率,K 是执行价,r_f 是外汇的无风险利率,σ 是汇率的波动率,r 是本币的无风险利率。而美式的外汇期权定价则要复杂一些,可使用我们前面提到过的二叉树等数值方法进行。

在任意两种货币之间,看涨期权和看跌期权是对称的,用 A 货币购买 B 货币的看涨期权和出售 A 货币得到 B 货币的看跌期权,其效果是一样的。若标的货币的价值相等的话,看涨和看跌期权的价值也应该是相等的。

例 11.6 设当前英镑对美元的汇率为 1.5808(美元/英镑),美元无风险利率为 2%,英镑无风险利率为 4%,汇率波动率为 15%,求有效期为 3 个月的执行价为 1.60(美元/英镑)的欧式英镑期权的价格,英镑期权合约的规模为 31 250 英镑。

由 S = 1.5808, K = 1.60, r = 0.02, r_f = 0.04, σ = 0.15, T - t = 0.25 得:

$$d_1 = \frac{\ln(1.5808/1.6) + (0.02 - 0.04 + 0.15^2/2) \times 0.25}{0.15 \times \sqrt{0.25}} = -0.1901$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} = -0.2651$$

$$N(d_1) = 0.4246 \quad N(d_2) = 0.3955$$

$$N(-d_1) = 0.5754 \quad N(-d_2) = 0.6045$$

$$c = e^{-0.04 \times 0.25} \times 1.5808 \times 0.4246 - e^{-0.02 \times 0.25} \times 1.6 \times 0.3955 = 0.0349$$

$$p = e^{-0.02 \times 0.25} \times 1.6 \times 0.6045 - e^{-0.04 \times 0.25} \times 1.5808 \times 0.5754 = 0.0618$$

由于合约规模为 31 250 英镑,因此这样的一份英镑看涨期权价值为 1 090.625 美元,而这样的一份英镑看跌期权价值为 1 931.25 美元。

例 11.7 同例 11.6,求以英镑为本币进行报价的,有效期为 3 个月,执行价为 0.625(英镑/美元)的欧式美元期权的价格,美元期权合约的规模为 50 000 美元。

由 $S = 1/1.5808 = 0.6326$, $K = 0.625$, $r = 0.04$, $r_f = 0.02$, $\sigma = 0.15$, $T-t = 0.25$ 得:

$$d_1 = \frac{\ln(0.6326/0.625) + (0.04 - 0.02 + 0.15^2/2) \times 0.25}{0.15 \times \sqrt{0.25}} = 0.2632$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} = 0.1882$$

$$N(d_1) = 0.6038 \quad N(d_2) = 0.5746$$

$$N(-d_1) = 0.3962 \quad N(-d_2) = 0.4254$$

$$c = e^{-0.02 \times 0.25} \times 0.6326 \times 0.6038 - e^{-0.04 \times 0.25} \times 0.625 \times 0.5746 = 0.0245$$

$$p = e^{-0.04 \times 0.25} \times 0.625 \times 0.4254 - e^{-0.02 \times 0.25} \times 0.6326 \times 0.3962 = 0.0138$$

由于合约规模为 50 000 美元,因此这样的一份美元看涨期权价值 1 225 英镑,而这样的一份美元看跌期权价值 690 英镑。

比较例 11.6 中的看涨期权和例 11.7 中的看跌期权,以 1.6(美元/英镑)的执行价购买 31 250 英镑的看涨期权价值 1 090.625 美元,以 0.625(英镑/美元)的执行价出售 50 000 美元的看跌期权价值 690 英镑,两者的执行价(汇率)实际上是相同的。前者(看涨期权)代表用 50 000 美元购买 31 250 英镑的权利,后者(看跌期权)代表将 50 000 美元出售得到 31 250 英镑的权利,因此它们的实质是相同的,两个权利的价值也应该相等。当前的汇率为 1.5808(美元/英镑),看跌期权价值 690 英镑,按当前汇率折算,相当于 1 090.752 美元,与看涨期权价值 1 090.625 美元一致,其间 0.127 美元的差应该是由于在计算过程中取有限有效位数而引起的。同样,例 11.6 中的看跌期权和例 11.7 中的看涨期权的价值也是相同的①。

① 在例 11.6 和例 11.7 中期权的标的物的价值刚好相等,即按执行价 1.6(美元/英镑)换算,50 000 美元刚好等于 31 250 英镑,因此可以直接比较两个期权的价值。如果两个期权标的物的价值不是刚好相等,则要经过换算才可以比较,比如假设以美元为标的的期权合约的规模不是 50 000 美元,而是 40 000 美元,则要将该美元期权的价值乘以 1.25 才能与合约规模为 31 250 英镑的英镑期权的价值进行比较。

11.3-2 外汇期权的使用

使用外汇期权作为管理外汇风险的工具,可以在避免汇率的不利变化带来的损失的同时享受汇率的有利变化带来的好处。因此,尽管为此要付出一定的成本,外汇期权还是受到投资者的欢迎。

在用期货进行套期保值时,当要保值的货币和保值期限确定以后,就只需要购买或出售相应的期货即可。而在用期权进行套期保值时,由于期权的品种比较丰富,不但有看涨期权和看跌期权,还有不同执行价的期权,因此用期权进行保值就比较灵活。

以看涨期权为例,一般用于对将来要购买的外汇进行保值,当汇率上升,超过执行价时,看涨期权有收入,可以用于抵消由于汇率上升在现货头寸上遭到的损失,而汇率下降,低于执行价时,看涨期权不起作用,保值者可以直接享受在现货头寸上实现的收益,从而实际锁定一个等效的最高汇率,即未来购买外汇的成本。采用的看涨期权执行价格越低,期权的收入越高,锁定的等效的最高汇率越低,有效成本上限越低,但是购买期权的成本也越高;反之,执行价格越高,期权的收入越低,锁定的等效的最高汇率越高,有效成本上限越高,而购买期权的成本则越低。因此在锁定的等效的最高汇率和购买期权的成本之间有一个权衡的问题。

例 11.8 同例 11.2,设在 8 月 20 日,一个美国公司计划在 12 月 20 日购买 200 亿日元。公司担心在购买日之前日元可能会升值,会提高成本,于是决定购买 12 月 20 日到期的日元看涨期权进行套期保值,以避免损失。

设在 8 月 20 日,日元的汇率为 0.008 323(美元/日元),日元无风险利率为 1%,美元无风险利率为 3%,汇率波动率为 15%。

按利率平价关系,12 月 20 日到期的远期汇率为:

$$0.008 323 \times e^{(3\%-1\%) \times 4/12} = 0.008 378 7(\text{美元 / 日元})$$

每一份日元期权合约的规模为 625 万日元,对 200 亿日元保值,需购买:

$$200 \text{ 亿} / 625 \text{ 万} = 3 200(\text{份})$$

即 3 200 份日元期权合约。

表 11.4 是用 B-S 公式计算得到的有效期为 4 个月,不同执行价的欧式日元看涨期权的理论价值和该公司购买期权所需成本。

表 11.4 采用不同执行价期权保值的成本

执行价(美元/日元)	0.006 0	0.008 0	0.008 5	0.009 0	0.010 0
期权价(美元/日元)	0.002 355	0.000 506	0.000 232	0.000 085	0.000 006
每份期权价格(美元)	14 718.75	3 162.5	1 450	531.25	37.5
购买期权成本(万美元)	4 710	1 012	464	170	12

同期货或远期一样,期权的价格也有出价和要价,它们不同于我们计算出的理

论价值,有一定的价差,公司要购买外汇期权也要支付高于理论价值的代价。比如,对于上述执行价为 0.006 0(美元/日元)的日元看涨期权,公司按照市场的要价购买,也许每份期权的价格为 14 750 美元。为了简单起见,在本例中我们不考虑买卖价差,即假设公司能按理论价值买卖外汇和期权,同时能以无风险利率进行投融资。前面我们提到过,如果不考虑买卖价差和投融资利率差,采用期货保值的话,公司的实际有效成本可直接按远期汇率计算:

$$200 \times 0.0083787 = 1.6757(\text{亿美元})$$

下面我们来看在此条件下,采用期权保值策略后公司的实际有效成本。

假如我们选择执行价为 0.008 5(美元/日元)的日元看涨期权,在 8 月 20 日支付 464 万美元期权费,这笔期权费要计入实际有效成本。因为我们考虑的实际有效成本是在 12 月 20 日购买 200 亿日元的有效成本,但这笔期权费在 8 月 20 日就已经支付,因此计入有效成本时要考虑融资成本,按美元的无风险利率 3% 计算。计入实际有效成本的期权费应为:

$$464 \times e^{3\% \times 4/12} = 469(\text{万美元})$$

如果我们设到期日(12 月 20 日)日元的实际汇率为 S_T ,则购买 200 亿日元所需美元为 $200S_T$ (亿美元)。期权的到期价值为:

$$c_T = \begin{cases} 200 \times (S_T - 0.0085)(\text{亿美元}) & \text{如果 } S_T \geq 0.0085 \\ 0 & \text{如果 } S_T < 0.0085 \end{cases}$$

购买日元现货所需数额减去期权到期价值再加上期权费成本,公司购买这 200 亿日元的实际有效成本为:

$$Cost = \begin{cases} 1.7469(\text{亿美元}) & \text{如果 } S_T \geq 0.0085 \\ 200S_T + 0.0469(\text{亿美元}) & \text{如果 } S_T < 0.0085 \end{cases}$$

也就是说,公司购买这 200 亿日元的实际有效成本的上限是 1.7469 亿美元。当实际汇率低于临界点 0.0085 时,公司的实际有效成本为按当时的实际汇率购买日元的费用再加上 469 万美元,实际汇率越低,公司的实际有效成本也越低。

利用其他几种执行价的期权作保值的实际有效成本见表 11.5。

表 11.5 采用不同执行价期权保值后购买日元的实际有效成本

执行价 (美元/日元)	实际有效成本 上限(亿美元)	临界点 (美元/日元)	汇率低于临界点时的实 际有效成本(亿美元)
0.006 0	1.675 7	0.006 0	$200S_T + 0.4757$
0.008 0	1.702 2	0.008 0	$200S_T + 0.1022$
0.008 5	1.746 9	0.008 5	$200S_T + 0.0469$
0.009 0	1.817 2	0.009 0	$200S_T + 0.0172$
0.010 0	2.001 2	0.010 0	$200S_T + 0.0012$
期货保值时的实际有效成本		1.675 7(亿美元)	

可见,采用不同执行价的期权进行套期保值的结果是不同的,采用的期权执行价越高,实际有效成本可能达到的上限就越高,但实际汇率低于临界点时在按实际汇率购买日元的基础上附加的成本越小。公司到底应采用哪一种期权进行套期保值,要视其对风险的承受能力而定,比如公司能承受的最大实际有效成本为1.7亿美元左右,可选择执行价为0.0080的期权,若公司能承受的最大实际有效成本为1.75亿美元,则可选择执行价为0.0085的期权。

执行价越高,期权保值策略对公司实际成本控制的保护越小,风险越大。比如采用执行价为0.0100的期权,这是一个深度虚值的期权,由于实际汇率高于临界点的可能性很小,期权不大可能被执行,该策略对公司实际成本的控制几乎不起任何作用,与不作任何保值的结果近似。而执行价越低,期权保值策略对公司实际成本控制的保护越完全,风险越小。比如采用执行价为0.0060的期权,这是一个深度实值的期权,由于实际汇率低于临界点的可能性很小,公司的实际有效成本几乎总是等于1.6757亿美元,与采用期货保值的结果近似。

11.3-3 双限期权

我们可以把用外汇期货和用外汇期权进行套期保值的策略比较一下:利用期货进行套期保值的时候,不需要支付成本,但当汇率朝有利方向变动时无法获利;而用外汇期权进行套期保值的时候,当汇率朝有利方向变动时能够获利,但购买期权必须支付一定的成本。事实上,期货保值策略是以放弃获利机会来换取确定的结果,而期权保值策略是以一定的代价换取一种获利的机会,这一代价就是一个固定的期权费成本,那么是不是可以换一种方式来支付这一代价呢?比如以承担有限风险的代价来换取有限的获利机会。由于期权具有很强的灵活性,这一设想可以利用期权来实现。实现这一设想的策略,称为双限期权。

双限期权通常可以这样构造:买入一种类型(看涨或看跌)的期权以限制汇率向下波动的风险,同时卖出另一种相反类型(看跌或看涨)的期权以限制汇率向上变动的风险。两种期权一般都是虚值期权,在当前价格的上下都留有一定的范围。这样,当汇率在有限范围内变动时,保值策略不起作用,当汇率变动超出一定的范围时,保值策略起作用,也就是说,实际的有效汇率会有一个上限和一个下限。这样做好处是可以大大降低保值的现金成本,因为在购买期权的同时还出售了一个期权,经过适当的选择,可以做到使保值的期初成本为零。

例 11.9 同上例,设在8月20日,一个美国公司计划在12月20日购买200亿日元。公司决定采用双限期权策略进行有限的套期保值,即购买12月20日到期的日元看涨期权,同时出售12月20日到期的日元看跌期权,期权标的均为200亿日元,记看涨期权的执行价为 K_1 ,看跌期权的执行价为 K_2 ,其中 $K_1 > K_2$ 。

设到期时实际汇率为 S_T ,如果不考虑期初买卖期权的成本,到期时购买日元现货的成本为 $200S_T$ 亿美元,看涨期权的盈亏为 $200\max(S_T - K_1, 0)$ 亿美元,看跌期权的盈亏为 $-200\max(K_2 - S_T, 0)$ 亿美元,所以实际的有效成本为:

$$\begin{aligned}
 Cost &= 200S_T - 200\max(S_T - K_1, 0) + 200\max(K_2 - S_T, 0) \\
 &= \begin{cases} 200K_2(\text{亿美元}) & \text{如果 } S_T < K_2 \\ 200S_T(\text{亿美元}) & \text{如果 } K_2 \leq S_T \leq K_1 \\ 200K_1(\text{亿美元}) & \text{如果 } S_T > K_1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

可见,公司购买日元的实际有效汇率的上限是 K_1 ,下限是 K_2 ,如果实际市场汇率在上下限之间,则按照实际汇率购买。

下面我们看一下不同执行价的期权的期权费,按 B-S 公式计算,可以得到:

执行价 K_1	(美元/日元)	0.009 5	0.009 0	0.008 6	0.008 4
看涨期权价	(美元/日元)	0.000 025	0.000 085	0.000 194	0.000 277
执行价 K_2	(美元/日元)	0.007 0	0.007 5	0.008 0	0.008 2
看跌期权价	(美元/日元)	0.000 005	0.000 032	0.000 132	0.000 204

采用不同的 K_1 、 K_2 组合的成本为(单位:美元/日元):

K_1	K_2	0.007 0	0.007 5	0.008 0	0.008 2
0.009 5	0.000 020	-0.000 007	-0.000 107	-0.000 179	
0.009 0	0.000 080	0.000 053	-0.000 047	-0.000 119	
0.008 6	0.000 189	0.000 162	0.000 062	-0.000 008	
0.008 4	0.000 272	0.000 245	0.000 145	0.000 073	

公司往往希望构造一个零成本的双限期权,为此,可以先根据公司的风险承受能力确定一个汇率上限,计算以这个上限为执行价的看涨期权的价值,然后在设法找到期权费刚好相等的一个看跌期权,该看跌期权的执行价就称为汇率的下限。表 11.6 给出一些零成本双限期权的上下限。

表 11.6 零成本双限期权的上下限

	K_1 (美元/日元)	看涨期权价 (美元/日元)	K_2 (美元/日元)	看跌期权价 (美元/日元)
工	0.009 5	0.000 025	0.007 425	0.000 025
程	0.009 0	0.000 085	0.007 825	0.000 085
学	0.008 6	0.000 194	0.008 176	0.001 094
	0.008 4	0.000 277	0.008 359	0.000 277

可以看到,当公司的承受能力比较强的时候,例如可承受的汇率上限为 0.009 5 的时候,零成本双限期权的上下限之间距离比较远,与不保值的情况比较接近;而当公司能承受的汇率上限比较低的时候,例如可承受的汇率上限为 0.008 4 的时候,零成本双限期权的上下限之间距离非常近,与期货保值的情况比较接近。

11.3-4 外汇期货期权

对于希望参与外汇期权交易的投资者来说,还有一个很好的选择就是外汇期货期权。与股指期货期权相似,外汇期货期权的标的也是外汇期货合约。对于欧式期货期权来说,如果作为期权标的的期货合约的到期日与期权合约的到期日相同的话,由于期货价格收敛于现货价格,所以这种外汇期货期权与外汇期权的价值相同,其定价可用B-S公式:

$$c = e^{-r_f(T-t)} SN(d_1) - e^{-r_f(T-t)} KN(d_2)$$

$$p = e^{-r_f(T-t)} KN(-d_2) - e^{-r_f(T-t)} SN(-d_1)$$

由于外汇期货价格,即远期汇率为:

$$F = Se^{(r_f - r_f)(T-t)} \quad (11.12)$$

得:

$$S = Fe^{-(r_f - r_f)(T-t)} \quad (11.13)$$

所以外汇期货期权的价值可表示为:

$$c = e^{-r_f(T-t)} [FN(d_1) - KN(d_2)] \quad (11.14)$$

$$p = e^{-r_f(T-t)} [KN(-d_2) - SN(-d_1)] \quad (11.15)$$

其中,

$$d_1 = \frac{\ln(F/K) + (\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

其表达式与股指期货期权的价格公式完全一样。

在CME的国际货币市场中,除了有很多品种的外汇期货交易外,还有对应的外汇期货期权的交易。期权的标的是一份期货合约。交易所除了提供每个月到期的期权合约以外,还提供紧接着的四个星期中,每个星期到期的期权合约,这些期权合约的标的期货合约是交易所提供的期货合约中到期日紧跟在期权到期日之后的那个合约。例如在每年的1、2月到期的外汇期货期权合约的标的都是当年3月到期的外汇期货合约。

本章小结

外汇主要是指外国货币,而汇率是指不同货币兑换时的比率,表示一种货币的一个单位能换取多少个单位的另一种货币,汇率的表示方法有间接标价法和直接标价法。即期汇率是指立即支付和交割的某种货币的汇率,而远期汇率是指成交后延期交割的现行汇率。

不同货币之间的汇率由它们之间的供求关系决定,影响两种货币之间的供求关系的因素主要有:两国物价水平、通货膨胀、利率、经济增长、市场预期和政府干预的差异等。

在外汇市场中,期货市场起的作用与远期市场起的作用差不多,事实上,外汇远期的交易量还高于外汇期货的交易量。这是因为远期市场主要是为大的商业用户和机构交易者服务的,而期货市场则是为小的商业用户和投机者服务的。由于两个市场之间通过套利关系的联系,远期价格和期货价格是保持高度一致的,期货市场的交易者也可充分享受巨大的远期市场所具有的高流动性带来的好处。

利率平价关系是指两种货币之间的即期汇率和远期汇率之间通过两国的无风险利率存在一个确定的关系,如果该平价关系不成立,则表明存在套利机会。利率平价关系实际上也就决定了外汇期货或外汇远期的定价。

外汇期货或外汇远期同样可用于套期保值,此时保值的对象是将来的外汇,希望避免的风险是由汇率变动带来的。自然套期保值是指利用外汇现货市场对将来的外汇进行保值,它通过外汇的借贷而非外汇期货的买卖实现保值的目的,其效果与外汇期货相似。两者套期保值的效果差异取决于外汇现货和期货交易中的买卖差价,以及借贷过程中的利差的大小。

外汇期权是以外汇为标的的期权。它在用于套期保值时有很强的灵活性,比如利用一个双限期权可以以零成本把将来的汇率锁定在一个事先设定的范围内,而不是像期货那样把将来的汇率固定。

外汇期货期权是以外汇期货为标的的期权,其作用与外汇期权相似。

外汇期权及外汇期货期权的定价可按照支付连续红利率的股票期权的定价方法,利用 Black-Scholes 公式的修正形式来进行计算。

复习与思考

256

金融工程学

- 设某时刻,英镑和日元对美元的汇率分别为 1.6(美元/英镑)和 120(日元/美元),而英镑对日元的汇率为 180(日元/英镑)。问有没有套利机会?若有,如何进行套利?
- 讨论利率平价关系不满足时,即 $F > S e^{(r_f - r_d)(T-t)}$ 或 $F < S e^{(r_f - r_d)(T-t)}$ 时的套利过程。
- 证明利率以到期收益率的形式表示时的利率平价关系:

$$\frac{F}{S} = \frac{1+R}{1+R_f}$$

- 利用 Black-Scholes 公式证明,具有相同的执行价和到期期限的、以 A 货币表示的 B 货币的看涨期权和以 B 货币表示的 A 货币的看跌期权,当它们的标的资产的价值相等时,期权的价值也相等。

参考文献

- Daniel R. Siegel and Diane F. Siegel, 1990, *Futures Markets*, The Dryden Press.
[美] 约翰·马歇尔、维普尔·班塞尔, 1998,《金融工程》,宋逢明、朱宝宪、张陶伟译, 清华大学出版社。
[英] 洛伦兹·格利茨, 1998,《金融工程学》,唐旭等译,经济科学出版社。
迈哈伊·马图, 2000,《结构化衍生工具手册》,林涛、杜育欣、王晖、高强译,经济科学出版社。