

| 孙路弘儿童智力发展系列 |

每位妈妈都能够轻松掌握和运用的数学启蒙方法

妈妈教的数学

孙路弘◎著



Math Learned From Mum



浙江人民出版社
ZHEJIANG PEOPLE'S PUBLISHING HOUSE

版权信息

本书纸版由浙江人民出版社于2016年11月出版

作者授权湛庐文化（Cheers Publishing）作中国大陆（地区）电子版发行（限简体中文）

版权所有·侵权必究

书名：妈妈教的数学

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

著者：孙路弘

字数：153000

电子书定价：25.99美元

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

目 录

版权信息

总序

引言

家里有一杆秤

指尖上的数学

粗心到底是什么

默想是智力发展的敌人

应用题的关键难点

从手指开窍出大脑智慧

发烧是多少度

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

孩子懂了吗？妈妈怎么知道
满分学生没有未来
不会做题，只有三种可能
后记
蔡校长写给读者的话
保教授写给读者的话
王博士写给读者的话
测试题答案



你不是一个人在读书！
扫码进入湛庐“科学教养”读者群，
与小伙伴“同读共进”！

妈妈才是孩子智慧启蒙的关键人物
让我引以为豪的并不是我自己的能力
而是给我这个能力的人——
我的妈妈



我与妈妈，那时我四岁

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书



我与弟弟，那时我九岁



小时候，爸爸妈妈给买的儿童车



获得全国数学竞赛的奖励



我在实验中学任数学教师，与全班
同学春游时合影

总序

父母将数学渗透我的人生

马走日，象走田。这是象棋的规则。先乘除后加减，遇到括号全让路。这是四则运算的规则。哆咪唆，大调，来发啦，小调。这是音乐调子规则。先来后到，排队守则，这是乘车规则。这些都是小时候留下的，至今

仍然在记忆中的。

下象棋需要规则，才能够与对手进行对抗；做算术题，需要规则，计算的结果才有作用；弹钢琴，也要熟悉音乐的调性，才能够理解国歌的旋律与抒情旋律之间的差别；乘车遵守排队的规则，才不会拥挤，不会出现磕碰。

《妈妈教的数学》激发了我对数学的兴趣，生活中的点点滴滴都可以悄悄地变成数学的形式，比如清点包了多少个饺子，下楼数楼梯，记住家

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

里的楼号、门牌号，或是收电费。我至今都有这样的习惯，走楼梯数台阶，看地板上瓷砖的数量等。通过这些细小的事情，我不害怕数字，对公式也不恐惧，并渐渐爱上了数学。

《爸爸教的数学》更多的是规则；约束自己的行为，用的就是规则。吃饭、睡觉，这些生活中的事情都有规则，上学放学也有规则，做数学题也要依靠规则。爸爸引导我重视规则，遵守规则，并按照规则做事。规则仅仅是数学思维方法中的一种，我自己小学期间的日记中，出现爸爸的次

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

数并不多，但每次出现都是伴随着想法、做法和方法的，都是基于思考方式的。由此，爸爸打开了我认识世界的多个小路，多个小窗户。当我成为父亲以后，延续了这个做法，譬如陪伴儿子打篮球的过程，就是一种规则意识和对抗角色的思维排练。

早期购买《妈妈教的数学》的读者反馈较多的是受到了启发，却难以在自己的生活中落实与操作。于是《妈妈这样教数学》就推出了。借助具体的示范，具体的活动和具体的模板，将书中的内容贯穿到生活中，妈妈聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

可以三言两语就让孩子对难题茅塞顿开，就让孩子觉得好玩，就让孩子在不知不觉中，走进数学思维的天地。

这三本书，就是这样的逻辑，让孩子一步步登上智力发展的阶梯，运用兴趣激活的方式让孩子的智力自然发展，同时系统地将智力发育、规则运用与思维方式训练为一种本能。凭借这牢固的基础，数学思维可以扩展到方方面面，成为智力构成的主干。

数学是我一生的智慧源泉：从事市场营销工作，靠的是数学；从事销

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

售工作，需要掌握心理学，其中蕴含着数学中的“模糊的对策模型”；从事顾问咨询工作，靠的仍然是数学。在当下的大数据时代，数学就是我赖以生存的核心血液。数学也是一切科学的基础，是一切学问的皇冠。我并不介意将数学渗入我人生的过程和细节都揭示出来，让每一个爸爸、每一个妈妈都能获得启发，给孩子一个数学天地的魂，用来迎接未来千变万化的挑战。

随我一本一本来，从《妈妈教的数学》开始，翻开第一页，起步.....

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

读书指南针

感谢您购买这本书，我是孙路弘。正式阅读前，请让我先啰嗦几句：

第一句：书中的日记。那是我童年的记载，源自我的小日记本，其中保留了当时不会写的字和用过的拼音。日记中的片段勾起了我对过去的回忆，这些回忆让我更加理解孩子与成人在视野和思维方式上的差异。看日记，权当是理解一个孩子的童心。如果你的孩子也是小学三四年级，不妨

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

让他们看看日记部分，他们也会学着开始写日记的。我的有些日记是在每一个回合的开篇，也有一部分穿插在行文中，不妨将它们当做时光穿梭机，让你在我的童年与我的现今之间游离一会儿吧。

第二句：测试题。每个回合结尾还有测试题。测试题就是对读者的理解能力进行评估。一个回合阅读结束，内容都理解了吗，是否存在不理解的地方？这一章节的核心本质到底是什么，妈妈们能够完全领会吗？做一下测试题，就能帮您梳理一个回合

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

的梗概与要点。

第三句：二维码。 二维码，不是文字；虽读不懂，里面却藏了太多的东西。不过，您手里的智能手机能够解码。用微信的“扫一扫”，然后镜头对准二维码，就能看到了。其中有我的讲解，是我本人亲自出马哟！尤其是通过阅读文字不太容易理解的地方，比如手指操，就可以扫一下旁边的二维码，把我召唤出来了。本书最后还有一个二维码，就是十道测试题的汇总，您可以在线上实时做题，测试自己的理解，马上得到答案解析。

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

好了，我啰嗦得够多的了，阅读一本书，就是开启一段文字的旅程，旅途中有我伴随。欢迎您随时用二维码把我召唤出来，给您说上一段。现在，开始你安静的阅读旅程吧.....

引言

每位妈妈都能锻造一个有
价值的人

我的妈妈是一个普普通通的家庭
妇女，她怎么有能力教会我数学呢？

在我小的时候，妈妈的任务无非
就是给全家人做饭、洗衣，早晨叫我

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

起床、扔给我干净的衣服。10岁那年我上小学四年级，在我的印象中，我家住在一个筒子楼里，从楼梯上去后，一边有5户人家，另一边有4户人家。9户人家共享3个卫生间、3个厨房。每个月，都有一家要负责收整个楼层9家的电费。由于没有电表，电费是按照人头计算的。

轮到我家收电费时，妈妈会给我一张纸，上面左侧一列有每家应该缴纳的费用，而右侧是空格，用来填写收缴上来的实际金额。如果左侧应该收到的总数与右侧实际收到的总数能

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

够对上，收缴电费的工作就算完成了。我挨家挨户地去收钱，一收到钱就把金额写在右侧相应的位置，然后回家把钱交给妈妈。妈妈点钱，我负责将右侧的数字都加起来，然后把加好的总数写在纸上。

有一次，我发现左右两侧的总数不符，简单一算，差三毛六。妈妈听了这个数后，连看都没看就说肯定是我把数字的位置写错了。我一一核对了一下，还真是，一家应该收五毛九，我写成了九毛五。不过，妈妈清点实际收到的钱数，却是正确的，也

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

就是说，是我粗心将数的位置写错了。吃过晚饭，我问妈妈：“你怎么连看都没有看就知道是位置写错了呢？”妈妈说：“差三毛六，是9的倍数，应该不会是加错了，而是位置颠倒了。”正是这句话让我陷入了长时间的沉静——至少对一个10岁的孩子来说，连续三天都比较安静，没有那么多好奇的问题，算是够长时间了。

只要差错是9的倍数，最大的可能就是位置颠倒了，这是为什么呢？没错，九毛五与五毛九的差就是三毛六，她是通过三毛六猜测到我将九和聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

五的前后次序弄错了。这里面有什么规律吗？如果写错位置的是八毛五和五毛八，那么差是两毛七，仍然是9的倍数；如果错的是一毛七和七毛一，差是五毛四，还是9的倍数。也就是说，不管我错的地方在哪里，只要差是9的倍数，妈妈都会推测出是我将数字位置弄颠倒了。

她是怎么知道的呢？这个问题不仅让我安静了三天，更让我将一生都投进了数学的天地。

数学这个东西能够吓住许多人，

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

很多家长却仍然前赴后继地将孩子送上这条艰难的旅途。而生活中这么一件小事儿，就能够让一个孩子自愿自觉地去追求数学这门如此枯燥的学科，其威力可真是不小。多少家长因为希望孩子学好数学而送孩子参加各种奥数班、补习班，费了九牛二虎之力，最终却适得其反，使孩子一见到数字便心生恐惧。孩子遇到的困难越多，内心的挫败感就越强烈。当家长们匆匆忙忙送孩子走上艰难的数学之旅时，大概从来没有考虑过孩子的心理感受，更无从谈什么兴趣激发、培养

和发展了。妈妈从来没有强迫过我学习数学，我也自然没有被数学吓住。我小的时候对数字、算术没有任何意识，也就是说，对我而言学的不是什么数学，也不是什么算术，而是游戏、是挑战、是好奇。

试想一下，最初孩子的脑海中本来没有“数学”这个词汇，父母打算教他这么一门高深的学科，于是正经八百地说：“孩子，数学是所有科学的基础，必须学好，咱们今天就开始从数学的基础学起……”这样从一开始，便在孩子的意识中树立了一个艰难

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

的认识，一个模糊的、似懂非懂的概念。当孩子发现父母、老师讲的许多话都难以理解时，数字、数学、算术就渐渐变成让他们恐惧的东西，其心理上就会本能地出现抗拒、抵触的情绪。这时，父母和老师又觉得孩子不听话、不配合，认为孩子的态度有问题，却不知道实际上是教学方法、教学形式让孩子无法接受。

孩子在能力上不具备接受抽象事物的基础，反映出来的消极、逃避不是态度问题，而是能力有限的一种表现。如果从学前阶段就留下这样的心

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

理烙印，小学一二年级又得到进一步的强化，那么对孩子来说，数学从此就真的成了让人恐惧的东西。以后每当再遇到数学系的学生，他们就会心生敬佩，觉得能够学数学得多么聪明啊！其实，数学都是被父母、老师弄成这个样子的。

让我感到自豪的不是我自己，而是我有一位难得的妈妈。收电费不是杜撰的故事，当然也不是神话，它来自真实的生活。此外，还有买日用品时让我口算钱数、乘公共汽车时让我去买票并核对找的钱是否正确等，这

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

样的生活细节培养了让我引以为豪的数学能力。从小学到初中，再到高中、大学，在数学领域建立起来的脑力成为支撑思想的能力，这些能力帮助我更快地理解一些复杂的事情，更快地掌握比较抽象的概念，更快地进入新的领域。等我自己成为数学教师后，在与各种不同性格的孩子互动的过程中，我渐渐认识到，让我引以为豪的并不是我自己的能力，而是给了我这种能力的人——我的妈妈。

妈妈的三言两语总是会让我回味无穷。每年，我家至少会轮上一次查聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

收电费的任务；每周，我都会有加总一周早餐费用的任务；每天，我都习惯性地计算一次下楼的楼梯数。在这些任务中，我有时能够做对，有时会粗心犯错。但是，我的粗心导致的诸多错误不但没有成为挨骂的理由，反而成了引领我探索数学天地的极大诱惑。妈妈指出过我忘记进位的错误，还指出过错位的错误。总之，她总是能够快速看出是乘法做错了，还是加法做错了。她的这种快速发现错误根源的能力总是让我十分感慨，在我成人之后更是如此。

妈妈才是孩子智慧启蒙的关键人物。在北京师范大学数学系求学的过程中，我选修的科目中有儿童心理学。这门学科强调，孩子学习任何新知识、掌握任何新能力、建立各种新概念的过程都是循序渐进的，不仅有术语的认识、熟悉、运用、掌握的过程，还有亲自动手尝试的过程。这个过程可以在学校里由老师辅导来完成，可以通过同学之间的讨论来完成，当然也可以像小朋友玩游戏一样，在参与、体验、尝试中完成。从我幼儿时期的数数、掰手指加法，到儿童时期

的加减混合、一位数乘法，再到少儿时期的两位数乘法、简单除法，然后是智力思考应用题、火车追击问题、泳池排水问题、鸡兔同笼问题，及至初中的初等代数、初等几何，每个阶段都有妈妈的影子。妈妈没有上过大学，也没有资格当数学老师，甚至连幼儿园老师的资质也不具备，但她却启蒙了我的数学才智，培养了我一生不变思考的习惯。可见，能够真正启蒙孩子智慧的不是老师，而是妈妈。

每位妈妈都能锻造出一个不同的人。任何国家、任何民族，其优秀的
聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

儿女、杰出的人才都是由母亲哺育的。有人说，两个民族的竞争其实就是两位母亲的竞争。妈妈的细致周到成就了孩子的健康，妈妈的三言两语塑造了孩子的信念，妈妈的一点一滴启发了孩子一生的追求。在当数学老师的职业生涯中，发现每位妈妈都能够在有意无意之间传递一种知识、激发一个兴趣、点燃一簇火花。不断积累的知识最终会成为思想的基石，不断激发的兴趣最终会成就一生的事业，不断放射的火花最终会迸射出光芒，照亮世界、照亮人类，如明星闪烁般

灿烂辉煌，妈妈也就成了培养人才的伟大的人。

爱因斯坦有这样一位妈妈，牛顿有这样一位妈妈，莱布尼茨也有这样一位妈妈。再看看中国历史，祖冲之有这样一位妈妈，徐光启也有这样一位妈妈。这些妈妈都是平凡得不能再平凡的人，教科书中没有她们的名字，历史典册中也没有她们的传记，但她们的贡献与所哺育出的伟人的名字就镌刻在人类历史进程的丰碑上。

对于妈妈而言，你的孩子在12岁

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

以前，都是你能够雕琢他的时候。每一个时刻的眼神，每一个瞬间的肢体反馈，每一次的呕心沥血、梦中惊醒，都贯穿着你对孩子的影响——对孩子身体健康的影响，对孩子智力发育的影响，对孩子智慧启蒙的影响。你培育的不是孩子，而是民族的未来。那么，你打算如何启蒙他呢？

任何一个两位数，比如48，都可以变成84，然后做一次减法会得到一个数，那个数一定是9的倍数。比如 $84-48=36$ ，36就是4乘以9的结果。你不妨再试试28这个数，先变成82，然

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

后做一次减法，得到的是54，54是不是9的倍数呢？多尝试几个，比如37、46、19，等等。

神话来自神奇。我的妈妈并不知道这个规律的原理，但却知道这个规律，并在比较两个数字不同的时候运用了这个规律，让一个孩子觉得如此神奇，并将神奇延续下去，从而成为神来之笔，最终被艺术家变成神话。对孩子来说，原理其实并不重要，重要的是应用，把规律用熟、用透、用烂，从而激发出好奇心。在追问每一个“为什么”的过程中，孩子渐渐培养

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

了兴趣，获得了快乐，而科学的秘密也就一点一点地被揭示了出来。这一切让孩子陷入其中、不能自拔，不知不觉中挖掘的能力、探索的办法都成为习惯、成为本能。智慧源于其中，能力萌发于此。

更重要的是，我的妈妈总是能够在日常平凡的生活中找到自然而然的机会来激发我的兴趣。借收电费计算错误的机会激发了我对数字倍数的兴趣，借乘车买票锻炼了我对减法的熟练应用，借买书培养了我口算、心算、连加的能力。多数妇女都能够生育

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

孩子，但却不是所有生了孩子的妇女都能够成为让孩子自豪的妈妈。寻找生活中的各种细节，并借机发挥，把话题引到孩子有兴趣的层面，这才是合格的妈妈应该做到的。

当我50岁的时候，回顾自己已经走过的人生道路，我感谢的人是我的妈妈。她能够做到的这一切，所有用心的妈妈都能够做到，也一定能够通过对孩子智慧的启迪，对兴趣的激发、培养和促进，让孩子拥有更强大、更深刻的思考能力，从而创造美好的人生。

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

有人说，99%的父母是教不好自己的孩子的。还有一种更加鲜明的说法：再好、再出色的教师，也教不好自己的孩子。有趣的是，妈妈在她40岁谈到对我的教育时，她认为自己是失败的。根据是我没有成为大学教授，没有成为科学家，没有成为知识分子。然而等到她50岁谈到对我的教育时，她认为一部分是成功的，比如我做人善良、比较正直、追求事业、不断努力。根据是我在不断学习新的知识，并努力进入全新的领域。等到她60岁再谈到对我的教育时，她的说法

是，她是成功的。根据是我仍然在从事教育领域的工作，并渐渐得到了这个领域的认可，获得了一定的知名度，而且自我感觉有所成就、对社会有价值。

在父母能不能教好自己孩子的问题上，为了比较客观地判断父母对孩子教育的作用和效果，请思考如下几个问题：

- 教好孩子的意思是性格好、智力高，还是品质好？或者还有其他的意

思？

- 教好孩子用什么来衡量？是考试分数、老师的赞扬，还是各种赛事的奖状？
- 教好孩子应该用孩子的哪个年龄阶段来衡量？

妈妈用她的实践给出了答案，好妈妈胜过好老师。老师给的是知识、是理性、是系统，而妈妈给的是兴趣、是动力、是喜悦。妈妈，不是要成为家里的老师，而是成为一个启蒙孩子智力发育的朋友。在追随科学的路

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

上仅仅有知识、理性、系统并不足以启发孩子，往往还会是一种打击。人需要被自己的兴趣所驱动，而这就需要来自妈妈的细心引导与布局。等孩子长大、真正回头望去时，那种感激、敬佩便会油然而生，因为那既成就了妈妈的期望，也成就了自己的一生。

请您打开这本《妈妈教的数学》，让自己成为一位锻造有价值人才的妈妈。



家里有一杆秤

◎4岁左右，孩子就已经对物体的重量有感觉了，能够比较不同物体的轻重。6岁左右，孩子就能够接受“轻重的不同是可以通过数字量化来比较的”这种认知。

◎眼睛看得多了，耳朵听得多了，并参与其中，看到自己的不同做法会产生不同的结果，也就开始对事物有了兴趣。重要的是，这一切都不是事先告诉你的。

1972年3月21日

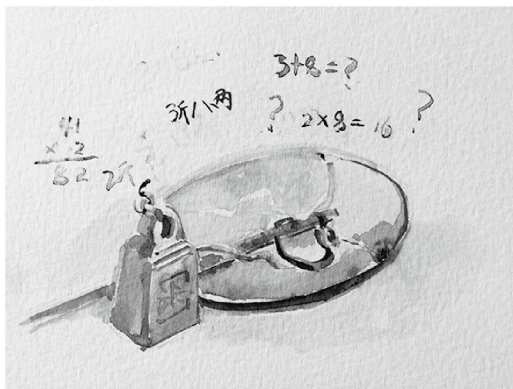
星期二

阴

今天放学回家，一进门就看到妈妈在用秤称重量。秤盘上放了萝卜，旁边还有我家的米袋、我的枕头和纸，妈妈称了东西就写上数，我看到6两、1斤1两等几个数。这时，妈妈拿起我的书包放到秤上，然后在长条棍儿上挪那个疙瘩，她说那是秤砣，之后拿笔写上：2斤4两。妈妈让我把书本、铅笔盒都拿出来，分别放到秤上，又都写了数，我就知道了我的铅笔盒重2两，三本课本重4两，空书包重6两。这一天过得很有意义。

我的爸爸在广播事业部文工团工作，他工作使用的工具是钢琴，输出
聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

的结果是歌曲。我的妈妈年轻时身体不好，从部队离休了，她每天的工作就是照顾家庭、照顾我和弟弟。这样的家庭怎么会有一杆秤呢？



上大学之后，我渐渐有了一些社

会意识，开始觉得在自己成长过程的点滴中，还有一些没有解释清楚的情况，于是翻阅起了从小学四年级开始写的日记，试图理解当时的情况以及当时自己生活的细节。我对家里有这杆秤感到十分奇怪，于是就此事向父母询问，才明白一个没有做过生意的家庭怎么会有秤。

一天，我的父母在下班回家的路上看到一家商店门口排起了长队，妈妈不由分说赶紧加入队伍，排了一个多小时才进到店铺内，发现大家排队买的是秤。爸爸埋怨妈妈见队就排，

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

也不问卖什么。妈妈说，其实家里也是需要秤的，有时买回来的肉是按照两斤买的，却觉得根本就不到两斤，因此需要秤来称一下。两人也没有更多的争议，就把这杆秤买回家了。5块钱的秤，对当时每月工资才38块钱的家庭来说，不是一笔小数目。在那个什么东西都短缺的年代，只要有排队，就意味着有东西卖，不由分说排了队再说的情况屡见不鲜，买到不需要的东西自然就是家常便饭了，这是妈妈排队导致的结果。妈妈说秤有用，而秤的价格不便宜，当然她就更

多地使用这杆秤了。

妈妈肯定没有想到，1972年3月21日，她给书包称重量这个举动深深影响了我。从那天起，我回家后的第一件事就是给我的书包称重量，后来开始给爸爸的茶杯称重量，家里10斤以内的小东西都被我称过了重量。有一天在学校，校办工厂车间许老师到班里讲勤工俭学要做橡胶圈的事情。下课后，我看到他喝水的大茶杯，用手掂了一下，然后自言自语地说：“1斤6两。”许老师听到了，看了我一眼，笑笑说：“你说这个茶杯1斤6两？”

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

我没敢说话。等下午放学的时候，许老师到班里找到了我，让我去校办工厂。到了以后，他让我拿起桌上的茶杯，我掂了一下，他问我多重，我说差不多9两。他从办公室的门后取出一杆秤，把茶杯放上去称重，然后惊讶地对我说，你怎么光用手就能知道多重呢？

我每天给书包、书本、铅笔盒、茶杯、水杯称重，都是自己用手拿上拿下，连续一个多月，手感就越来越准，当然能够做到用手称重了。当我有一个小小的绝活儿，能够让学校的聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

老师感到惊讶，并特别叫我到办公室去验证而不是批评我时，这对还是孩子的我来说简直就是天大的激励。

记得有一天回家，妈妈见我又在给书包称重，她拿过来一个瓶子，瓶中有水，让我称一下重量。称完后，我在纸上写下：1斤6两。妈妈说应该写成1.6斤。接着，我把瓶中的水全部倒掉，再称是8两，然后妈妈让我写成0.8斤。这时，妈妈问我刚才的水有多重。我哪里知道水有多重，我都不知道斤是什么、两是什么，当时仅仅知道这些字代表了这个东西重的

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

程度。数越大，当然就越重了。不过，在这种称重的过程中，我学到了10两就是1斤、1斤就是10两的知识，记得非常快，也理解得非常快，于是算出倒掉的水重8两，也就是0.8斤。

对于小数点的接受过程是自然的还是人为的，对孩子的理解与应用至关重要。此时，我才意识到小数点的作用是更加容易得出两个数之间的差，不然妈妈给我解释1斤6两减去8两将是多么大的麻烦。妈妈讲到1斤等于10两的时候，我说那么1斤6两不就是16两嘛，16两拿走8两，就是剩下8

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

两喽。

小数点是数学历史发展过程中一个重要的里程碑，是数学领域的一件大事。这么一件大事讲给小学生听，唯一的结果大概就是成功地把孩子都吓住，使他们在平时生活中再也不敢碰相关的事情了。妈妈的成功之处就在于让我自然地接受了小数点的作用，却没有用多么悠久的历史、多么辉煌的成就来培养我敬畏的心情和崇拜的心理。没有了类似这样无用的负担，又与眼前的生活息息相关，接受起来自然就轻松得多了。

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

这件事至今仍令我记忆犹新，并不是因为我第一次知道自己喝了多少水，也不是因为算出了瓶子的重量，而是在那个星期五，学校算术课老师出了一道题，这道题让我牢记了以上所有的画面：一个瓶子中有水，连瓶带水共重8斤，倒出了一半的水后称了一下，重4.5斤，那么瓶子是多重？

老师的题目出来后，我都没有举手就脱口而出了：“倒出了一半的水后重4.5斤， $8-4.5=3.5$ ，这3.5斤就是倒掉的那一半水，所以原来的水总共

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

有7斤，连瓶带水共重8斤，那么瓶子当然就是1斤了。”老师觉得我一定是以前做过这个题目，所以没有让我发言，而是给了其他同学更多的时间。我却开始不安、乱说乱动，甚至开始打扰其他的同学。我居然问：那么知道倒掉一半水后，瓶子里还有多少水吗？我印象很深，那天放学后我被老师留了校。老师让我说出来是在哪里事先学过的，我说不出来的结果就是妈妈被叫到学校领我回家。从此以后，所有有关重量的应用题没有一个难倒过我，而且我都能以最快速度讲出

正确答案。

物体的轻重是最容易让孩子理解量化作用的切入点。对孩子来说，重量是一个比较抽象的概念，要到小学五年级才会学到。书中比较明确的说法是：重量是物体受万有引力作用后的度量，一个物体重量的量化数字就是这个物体的重量。其实对孩子来说，4岁左右就已经对物体的重量有感觉了，能够比较拿在手里的不同物体的轻重感觉。6岁左右，孩子就能够接受轻重的不同是可以通过数字量化来比较的这种认知。比如，通过看不聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

同罐头上标明的重量，就可以知道哪个拿在手里会轻一点、哪个会重一点，而不用依靠手的感觉来区别。

对物体进行数字量化、对温度进行数字量化，这些都曾经在人类文明的进程中发挥过重要的作用。仅仅通过看数字就能够知道哪个东西沉、哪个东西轻，这对孩子来说是神奇的，神奇的标志又是数字，我大概就是这样开始喜欢上数字的。每次跟妈妈去菜市场买菜的时候，我都是左手拎拎、右手拎拎，然后回家用秤来验证我的手感，并把重量写成数字。这样，
聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

数字在我脑海中就变成了一个生活中的东西，可以用来标重量，也可以用来标温度，还可以用来标长度。数字打开了我脑海中量化事物的大门。

小数概念的自然接触和掌握。孩子在学习算术的过程中接触到小数是五年级，而我在四年级的时候便在不经意间接触到了小数，即比1还要小的分量。妈妈没有给我讲小数的定义，也没有讲小数对数学的意义。对我来说，直接测量的时候，秤砣的位置在1的左边，就是不到1；如果落在1的右边2的左边，就是1点几。接受聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

一个对孩子来说比较抽象的小数概念，对我来说是多么轻松、多么不知不觉啊！

在学校的课堂上，老师一本正经地讲了40分钟，许多孩子还是觉得小数不就是比较小的数嘛。我在辅导小学四年级的孩子时，有的孩子给我举小数的例子时说：“1、2、3都是小数。”还有的学生说：“9也是小数。”我要求他们进一步解释，于是听到这样的回答：“我们现在都是8岁或9岁，还是小孩子，所以8、9都是小数。当然，幼儿园的孩子只有3岁、4岁、5

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

岁，他们更小，所以3、4、5就是更小小数。”居然还有孩子说：“小学是一年级到六年级，所以1、2、3、4、5、6都算小数。”孩子往往都是通过自己体验到的生活认识事物的，产生这样的想法也不足为奇。经过我的循循善诱，不知不觉间，几个难点的概念他们都已经融会贯通了。寓教于乐就是来自生活的教育。

亲手挪动秤砣，让手拎住的那个点的两边持平，然后查看秤杆上的刻度知道东西的重量，这样就可以学会斤两的关系。现在的孩子都是在学校聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

里学习这些内容，但学校并没有足够的秤来让每个孩子都随意地使用。其实，在玩的过程中理解了知识，掌握了概念，学到的也是融会贯通的知识。让孩子在回家后能动手实践，不但没有消耗多少时间，反而让孩子觉得在玩中得到了更多、更全面、更实在、更实用的能力。今天教育界津津乐道的寓教于乐，说的不就是我妈对我做的事情吗？

家里需要一杆秤。等我到大学四年级学习儿童心理学时，才理解家里的这杆秤对孩子智力发展的作用及

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

其背后的本质原理。重量是一个抽象概念，只有与生活中身边的事情结合起来时，才会变成眼睛能够看见、手能够感觉到的具象的东西。这时，脑海中也建立起了对应的数字概念，理解了物体重量的意思，并能够与手里的感觉对应起来，进一步刺激大脑皮层与手、数字、概念之间的联系。而缺乏这种体验的孩子在学习重量、长度、时间、温度的时候，就会仅仅停留在对概念的理解上，无法与具体的生活相结合。感谢妈妈那次无心的排队，感谢她购买了这样一杆秤，激

发了我的数字意识，激活了我的概念理解。

如果你的孩子上学了，你家有这样一杆秤吗？其实，你不一定非要照搬我的成长过程。你可以把温度计利用起来，也可以用上尺子，这些都是人类文明发展历程中的里程碑。能够用数字计量事物，人类的智力就能够在前人的基础上进一步发展了。一杆秤，可以让孩子学到重量的概念，掌握数字的作用，体会小数点的方法，以及理解比1小的数的实际意义。不断地控制平衡，让不同重量的两边到

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

拎节点的距离不同就可以保持平衡...
...这些知识、术语、概念不知不觉地
都变成了我脑海中的东西，仿佛我天生
就会、天生就懂似的。

其实，哪里有什么天生就聪明的人，哪里有什么天赋异禀的人，都是后天的环境、后天动手的活动带来的。眼睛看得多了，耳朵听得多了，并参与其中，看到自己的不同做法会产生不同的结果，也就开始对事物有了兴趣。重要的是，这一切都不是事先告诉你的。然而许多父母的做法是，在开始讲知识之前就说：今天要教一

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

个会影响你一生的东西.....对孩子来说，这个套路起到的作用仅仅是恐吓；被吓得僵化以后，孩子对后面听到的东西也就变成机械模仿和简单重复了，毫无乐趣和生机。作为抚育一个民族的母亲，你可以对这种情况说“不”，你可以行动起来，让你的家里也有“一杆秤”。

我从初中二年级起就想当老师，尤其想当数学老师。为了这个理想，我报考了北京师范大学。毕业后，我成为北京师范大学附属实验中学的数学老师。在教学中，当我看到学生在

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

理解概念的过程中遭遇的各种挫折以及他们拥有的各种与大人完全不同的理解时，我才有意识地去回忆自己学习这些概念的过程，才认识到妈妈给我创造的生活环境、给我营造的智力发育氛围、给我布置的智慧启蒙道具，也才意识到不是所有的孩子都经历过类似的环境、体验过类似的氛围，或者接触过类似的道具。

我很想问问妈妈，她是怎么知道环境的重要性、氛围的意义和道具的作用的。她没有上完初中就参军了，她怎么能够如此智慧地为我布下了成聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

长的“天罗地网”呢？妈妈的回答出乎意料：“我没有故意给你什么好的环境，也没有特别弄什么氛围、搞什么道具。只是顺着你做的事儿碰巧讲到了就讲到了，没有讲到也就算了。”这样的回答用一句谚语来描述还真是恰如其分，那就是“无心插柳柳成荫”。而我从事教育工作30年后体会到，那些望子成龙的父母们的做法与想法以及为此努力落实的方法，大多是另外一句谚语的折射：有心栽花花不开。

一切皆有原因。 当我养成了数

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

学思考的习惯后，我就一直不相信世界上的偶然事物。妈妈做的事情对她来说可能是无心的，但一定有可以寻找、挖掘出来的东西，符合儿童学习认知的规律。一定有这样的方法，我妈妈不过是偶然契合。找到了这样的方法并揭示出其背后的规律，复制人们想要的结果，也就能够控制好花朵的开放。花朵不是无心随意开放的，有关温度、水分、土壤、气候等本质的规律必然存在，否则人类凭什么是万物之首，凭什么能随意到太空去转一圈、到地下去弄出黑色的煤炭来取

暖？

凡事皆有因果，孩子的成长仅仅是许多因的一个果。多数家长要的是果，追求的是补习、做题、练习这些因。而从妈妈对我的影响过程来看，这些都不是什么真正的因，不过是表面的花拳绣腿罢了。智力启蒙一定有方法，一定有规律，一定有人可以主动控制的因。当一位好妈妈，有效地激发孩子形成数字概念，你完全可以做很多事情。

妈妈教的数学

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

- ◎ 让孩子把手伸到冰箱中10秒，问他有什么感觉，然后用温度计测量里面的温度。再让孩子把手放到冷水中，然后问他，是冰箱里凉还是水里凉，看孩子是否用温度计上的数字来解释。
- ◎ 问孩子是爸爸高还是妈妈高，然后问他多高、高多少，并拿出尺子来测量，把测量的数字写下来。
- ◎ 告诉孩子一个游戏只能玩3分钟，然后开始计时，结束后告诉他开始时指针的位置、结束时指针的位置。再让他玩5分钟，让他自己计时

。

- ◎ 拿两个不同的杯子，问孩子哪个杯子里面的水多。接着取一个透明的瓶子，倒入水，在水面（即瓶子对应处）画线，然后倒掉；再倒入另外一个杯子的水，就可以知道是高于那个刻度还是低于那个刻度，也就有了水的多少这个概念了。

当然，如果你的家里也有一杆秤，这一回中所讲的事情你就都可以做到。

从秤的使用开始，还是孩子的我，学到了数字，学到了小数，理解了重量，并能够在手中实际感受到分量的感觉。这其实完全吻合儿童的认知过程。任何人学习新的东西都有三个基础模式，分别是触觉模式、听觉模式和视觉模式。试错是人类起源并发展的最早的模式，试错就是触觉模式。第一个回合中，通过不断地实验、体验、参与，手动的过程驱动了大脑，从启动到疑问，接着就是想出来一些事情。这个过程是不能省略的，多少父母希望孩子快一点学到知识，快

一点掌握知识，快一点提高能力，实际上就是省略了探索的过程，彻底剥夺了孩子自然的发展步骤，最后即使学会也是没有过程的，容易遗忘的。

这个回合中，还是孩子的我，主要是通过什么模式真正领悟了一些重要的概念：

- A: 触觉模式
- B: 听觉模式
- C: 视觉模式
- D: 混合模式

(参考答案见全书末尾)



指尖上的数学

◎参与的过程比最终记住的结果要重要得多。

◎每位妈妈都能够做到，在日常生活中带孩子玩好手指头，借此来启迪智慧、激发兴趣，获得与众不同的感觉。

1973年5月15日

星期二

晴

今天我又被留校了，老师找家长到学校。我以为回家后爸爸又会zàu我一顿。回家的路上我走得特别慢，妈妈一直自己在前面走，我磨磨蹭蹭地进了家门。爸爸还没有下班。妈妈去做饭，我老老实实地赶快做功课。爸爸晚上回来没有打我，可能是我今天作业完成得快吧。

1973年5月16日

星期三

晴

今天上算术课，程老师表扬我了，还让我到前面给大家讲背诵九九乘法表的法子，那是我妈妈教我的，我用手指头做过加法，现在可以做乘法。所有的同学都不知道，老师也不知道，晚上睡觉前，妈妈说昨天她告诉老师我用手指头算乘法是她教的。我让妈妈再多教我一些绝招儿，这样老师同学就都觉得我挺神的。

记忆力这东西，不同孩子的表现真不一样。从一年级的時候开始，老

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

师就总是强调讲过的东西要记住，而且对班里的男生还要进行特别强调：不仅拼音、新字、符号——写在黑板上的都要记住，回家还需要按照老师的要求背诵指定的短文。

老师在强调记忆力的时候对男生与女生的要求是不一样的，而且给我印象最深的是，她对我会格外严格。妈妈也说过，我粗心的原因就是记性不好。为此她还特别给我找来一些据说能够提高记忆力的食品吃，比如核桃、豆浆、菜花等。现代脑神经外科医学的研究结果也部分论证了妈妈的聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

这些不知从哪儿得来的土法子的正确性。比如豆浆来自黄豆，富含大量的卵磷脂，是大脑运行需要的主要物质，菜花富含乙酰氯，是直接刺激脑细胞活跃的主要物质。

虽然妈妈在食品上用心良苦，但还是无法帮助我快速记住乘法口诀。男生与女生的记忆力水平不同，就算都是男生，不同小朋友之间的记忆力表现也不同。我为什么就记不住那些知识呢？于是，她开始使用她的新方法——这次竟然是手指游戏。

参与的过程比最终记住的结果要重要得多。一一得一，一二得二……七七四十九，七八五十六……三九二十一，四九三十九……每一次，不仅同学会笑，老师还会让我留校，让我大声朗读书中的九九乘法表10次、30次、50次，只要错一次，就额外再加10次，我简直恨透了这个玩意儿，心想：“这有什么意思啊，就算我把3乘以9的结果弄错了，又能怎么样呢？犯得着这样嘛！”无奈的是，只有8岁的我，怎么能拗得过大人呢！上课如同受罪，被老师点名站起来回

答问题简直就是酷刑，留校更是命运的折磨！妈妈来学校接我回家就是快乐的时光，一路上我们便开始了各种游戏，包括手指头的游戏（图2-1）。

妈妈： 2加6等于多少？

我： 8。

妈妈： 8加6等于多少？

我： 嗯，14。

妈妈： 还记得用手指头做的加法吗

？

我： 记得！

妈妈： 2加6用手指比给我看。

我伸出双手，伸到自己眼前，
一边一个一个地掰着指头，一边说：
“1、2、3、4、5、6、7、8，你看，这是8个指头。”

妈妈： 好，我们重新来一次。把10个手指都伸出来，从你的左手开始数到4。然后把这个手指弯进去，现在还有几个指头是伸着的？

我： 9个啊！

妈妈： 弯下去的这个指头左边有几个？

我： 3个。

妈妈： 弯下去的这个指头右边有几个？

我： 6个。

妈妈： 你是数到第几个指头弯下去的？

我： 第4个。

妈妈： 你还记得4乘以9是多少吗？

我： 三十.....嗯，几来着.....

妈妈： 左边有3个，右边有6个，就是36。

左边：三根指头

右边：六根指头

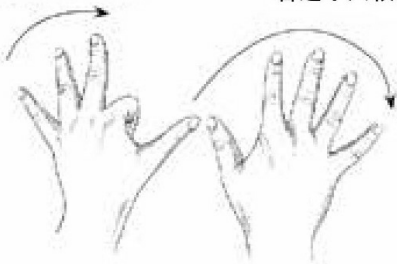


图2-1

我重新看着自己的手指头，把刚才妈妈说的做法从头做了一次。伸出双手10个指头，从左手开始数数，数到4，把这个指头弯下去，左边有3个指头，右边有6个指头，这就是4乘以9，是36。

我： 妈妈，那5乘以9呢？

妈妈： 数到第5个指头，弯下去，看左边几个右边几个。

我快速地做了一下，左边有4个，右边有5个，那就是45。是啊，五九四十五嘛！接着我又试了六九、七九、八九，直到九九。其中

在做到八九的时候，我右手的中指弯不下去，妈妈就帮我按住这根指头，左边7个，右边2个，就是72。

这时从育民小学到回家才走了一半，妈妈不断提醒我看车、看路、看行人、看树，因为我一直在摆弄自己的手指头。

第二天学校的算术课我就不害怕了，一个晚上在家里摆弄手指头，乘以9的口诀都了如指掌，实际上我已经完全不用摆出双手，因为脑海中就是双手10个指头的影像。

就这样，九九乘法表中乘以9的部分我再也不怕了，也再也没有出过

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

错。老师要求小朋友重复朗诵许多遍的意图，其实是想让孩子记住，我妈妈让我摆弄手指头的意图也是让我记住，但这两个过程却完全不同。机械地重复朗读，试图强迫自己记住，这是多么无聊、枯燥、折磨的过程啊！一点儿乐趣都没有。我妈妈想的法子居然是让我摆弄手指，摆弄了一个多小时仍沉醉其中。一个小时候，脑海里就全是这些不同组合的手指的影像，不也记住了吗？结果都是记住一些知识，过程却有着天壤之别。

老师和同学的认可是一种永恒

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

的、源源不断的激励。随后的几天，在一位数乘法上我就再也没有出过任何错误。我进步的速度非常快，从最差的一名，直接超越了班里所有小朋友。有时，我还会拿出手指头来摆弄一番，然后再说出答案。老师觉得我手里事先写好了口诀表，于是检查我的手掌，却发现我其实并没有看手掌，而是在看手背，可是我手背上没有任何字。老师给我出题：“四八多少？”我摆出了两只手，然后说：“32。”（图2-2）^[1]

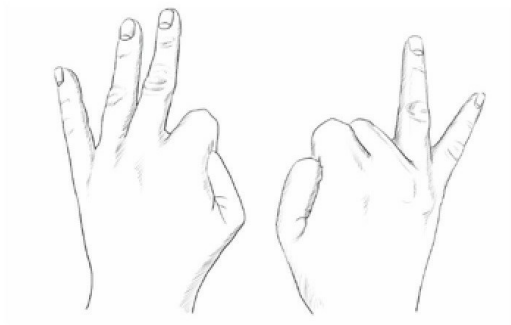


图2-2



老师让我停住两只手，当时我的左手有三个指头伸出，右手有两个指头伸出。老师发觉其中有奥妙，便问我是怎么弄的，我说不出来，也没有

说是我妈教的。在我的印象中，妈妈没有特别坐下来教过我什么。这一天我又被留校了，1973年5月15日，就是本回开篇的日记的来历。第二天，老师让我到讲台前把这个法子讲给所有同学听。他们眼神让我觉得自己很神奇，老师的认同让我觉得记忆力差不见得是坏事，变一个法子反而可能更出色。

自这件事以后，我在算术课上就没有走神儿过，也没有感到痛苦，因为同学们已经觉得我很神奇了，我当然不能轻易走下神坛啊！很难想象，
聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

这居然成了我日后不断努力学习、做各种数学题目的动力。孩子的内心其实不仅在乎父母的认可，而且更在乎同学的认同；孩子的内心其实不在乎大家都做同样的事情但我是第一，而更在乎我做的事情与大家不一样，也得到了同样的结果，而且过程还有趣、好玩儿。

多变换一些方法来讲解，我妈妈做得比一些老师要好！我的记忆力水平是否提高了，我自己并不清楚，而用手指头摆弄乘法这件事让我开了窍：大家都追随的法子不一定是唯

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

一的真理，如果那个法子不适合我（比如我的记忆力很差），那么肯定有一个更适合我的法子。对天下所有的孩子而言都是如此。

我当数学老师时要面对四五十名学生，课堂上讲授的方法确实能够让一半以上的学生理解、掌握，但这并不意味着另外不到一半没有掌握的学生就笨、就愚蠢，而是老师讲解的方法太单一，讲授的过程与孩子大脑中现有的内容没有形成匹配的接口。总之，孩子没有掌握、没有理解的主要原因就在于，父母、老师是否尝试过聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

用不同的方法来讲解知识。我的妈妈为了让我避开记忆力不足的弱点，用游戏的方式从手指开始展开了乘法的旅途，并让我变得与众不同、得到认可，这才是教育家所应该做的事情。

手指对大脑发育的重要作用。孩子从3个月开始就会做啃自己手的动作了：先是啃拳头（因为手指还无法全部伸开），等到四五个月的时候，手指渐渐伸开，他们开始啃大拇指，接着就是另外的4个指头。啃大拇指的作用最大，直接刺激脑细胞发育的作用高达50%；另外4个指头也很

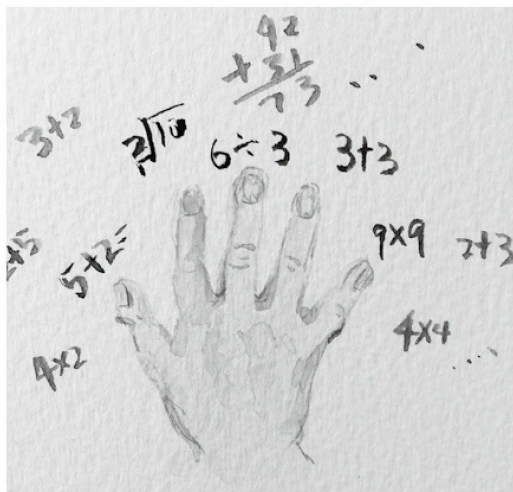
聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

重要，可以刺激大脑周边运动神经的连接。然后孩子开始用嘴去啃手能够抓到的东西。同样，四五岁开始学习加法的时候，用手指也是直接刺激大脑接受数量变化的好方法。从数学历史发展来看，十进制成为最常用的计算体系应该与人类有10个手指头有关。不过，在度量时间时，人们通常使用12进制，如一天的一半用12小时来标记、一年用12个月来标记等。

如果大家都习惯让孩子用手指来练习加法，为何乘法不能这么做呢？没错，这些都是学校老师不会教的，
聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

但却是启发大脑最有效的。可能学校的根本目的早就不是启发思维，而是便于管理、便于控制了。学校教的东西有多少在日常的生活中还有用有待核查，而学校没教的东西，有多少是我们日常的工作、生活所迫切需要的啊！比如手指对大脑发育在一岁之前的作用、在四五岁时的作用、在六至九岁时的作用都没有被列入教学大纲，也没有几个老师了解，更别提掌握了。不过，每一位妈妈都能够做到在日常生活中带孩子玩好手指头，借此来启迪智慧、激发兴趣，获得与众不

同的效果。



从儿童认知的过程入手来引导孩子学习。 我当了数学老师后，给

妈妈介绍我讲课的情况，包括我班里有11个奥数获奖的学生、我开始带一个小学奥数班的事情。我妈妈感慨地说：“看看你小的时候，怎么能想到你会成为一名数学老师呢？你4岁的时候还不会数数呢，比其他的孩子晚多了！快5岁的时候，你终于能数数了，可别的孩子都已经能数到300了，你还在20、30上弄不清呢。不过也还是有一些征兆的，比如你会跳数，这可能与你用手指头数数有关。”听妈妈说了这些我小学之前许多的成长细节，我才慢慢发觉，妈妈用手指教

我乘法还是合情合理的，毕竟数数慢，就只能依靠工具。四五岁的时候，妈妈让我伸出左手，用右手来数左手的手指头，我就是这样开始数数的。数到5以后，妈妈没有让我接着数左手的手指头，而是让我原路返回（图2-3）。

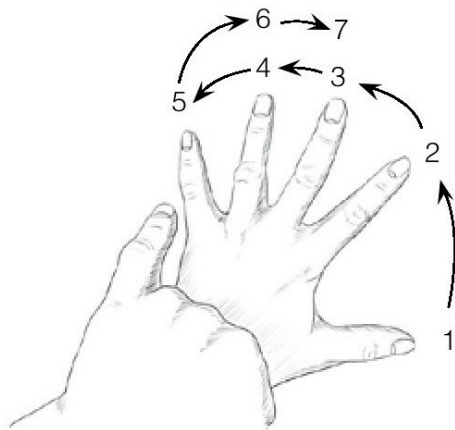


图2-3

当我数到23、24左右开始出错的时候，我妈问的问题是，转了几圈了？然后问我能不能在10圈内别出错。等我真的数到10圈，她又问我数到10

0会转多少圈。对于一个在中学执教的数学老师而言，这些都是无关紧要的问题，都是教科书中从来不会有的问题。它们都是太简单的问题了（图2-4）。



图2-4

如果仅仅从数学这个角度来讲，
是的，很简单！但如果从儿童心理学
的角度来讲，这些问题不仅次序巧妙

，而且精确地切中要害，调动兴趣的作用异常显著。这不是从知识出发来考虑孩子应该学什么，而是从孩子认识事物的现状出发来推动其求知的进步，激发探索的兴趣。具体掌握多少知识可能并不重要，重要的是激发了多少兴趣。如果单纯灌输大量的知识反而失去了求学、求知、读书的乐趣，那才是得不偿失的。妈妈的做法让我陶醉在过程的趣味性、参与性、互动性和探索性中，可能没有掌握多少知识，却使我养成了对知识追求的渴望，可以说，这种渴望驱动着我的一

生。

一个孩子的执着程度取决于兴趣被调动起来的程度。当我开始回顾这些往事的时候，发现难免会有一些遗漏了的环节，小时候的日记又没有那么全面（没有想到40年后，这些日记的内容还能够对许多父母有所帮助），于是只能指望妈妈还记得当时的一些更加详细的内容。比如乘以9的方法用手指头解决了，那么乘以8呢？乘以8的方法是什么呢？还有乘以7可以吗？当时又是怎么解决的呢？我当然还是要询问当时的当事人——我的聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

妈妈。

妈妈： 乘以8的方法是你自己想出来的啊！我就知道乘以9的法子，你追着问我乘以8、乘以7能不能也用手指的方法算出来。我说是，乘以9是最难的，最难的妈妈做出来了，乘以8该由你自己去解决了。

我： 那么然后呢？我自己就做出来了？

妈妈： 你自己都不记得了，你好像研究了一个星期，连吃饭都在掰你的手指头，嘴里还念念有词的，我估计你是在弄那个乘法呢。

我： 那后来我是怎么做出来的呢？

妈妈： 你没有跟我说啊，还是那次你被留校叫家长，我去了才知道你把乘法表里的所有数都用手指头做出来了。

在北京师范大学学习了儿童心理学后我才知道，评价一个人对一件事情是否执着，通常要看他做这件事情的持久性。坚持做同样事情的时间越长，这个人的注意力、执着程度就越好，一生也更容易取得超过常人的成就。妈妈说，在掰手指这个事情上可以看出来，我的执着度和注

意力都比较强。虽然老师经常对她说我纪律散漫、精力不集中，但她看到我连续几天都在琢磨一件事，便不太在意老师的评价了。

老师可能看到的只是孩子注意力不集中的现象，却并没有思考其中的原因，也没有思考孩子到底是做什么方面的事情注意力不集中，是所有事情都不集中，还是你让他做的事情不集中。回顾我个人成长过程中妈妈与我的所有互动、游戏、交流，我认识到我能有那么强烈的执着程度和不达目的不罢休的意志力，不过就是投入

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

一件好玩的事情中的忘我境界，是兴趣在驱动着人的追求，是强烈的兴趣驱动着精力长时间地集中。

作为父母，不要轻易地说自己的孩子精力不集中。有些老师这样说是因为老师希望所有的孩子都能够一致，这样他们就省事了——老师才没有动力去发现孩子精力不集中究竟是因为都掌握了、都知道了，还是因为没什么新鲜的，老师怎么能承认自己图省事的动机呢！家长就不一样了，你让孩子做的事情，孩子可能注意力不集中，但换一个视角，孩子自己做的

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

事情是否有忽视外界存在的时候，是否有专注于一件对他来说有趣的事情而不吃不喝的时候，这才是评价执着程度的正确方法。兴趣能够驱动执着，能够催生意志力，能够成就一生的事业。

现在许多孩子从3岁起就具备数数的能力了，无论是自发的还是大人人为教的，他们都应该可以数数了。当孩子能够正确数到100的时候，作为启发智力的方法，妈妈可以参考如下的建议。

妈妈教的数学

- ◎ 向孩子示范可以倒着数数。
比如你可以说，孩子，跟着妈妈数啊，99，98，97……观察孩子是否能够跟上，如果跟得上，自己的声音就可以渐渐小一点，最终只听孩子倒数；如果孩子连续20个都没有出错，就应该鼓励他倒数到1。
- ◎ 以上如果做到了，就可以鼓励孩子跳数。比如你可以先示范：2，4，6，8……看孩子是否能够自己跟上。
- ◎ 做所有这些事情的时候，没

有必要讲“这是偶数数列、这是奇数数列”这些大人的术语，只要他能够正确数下去，可以等将来他们有接受术语能力的时候再说，那时效果才好。可以这样跟孩子说：1，3，5，7……看能够数到多少。

- ◎ 以上都非常熟练后，就可以示范：3，6，9，12，15……还可以尝试1，5，9，13，17……
- ◎ 这些都做到了，就可以鼓励孩子数自己一只手的手指头了。一个指头一个指头地数下去，问孩子前面我妈妈问

过我的问题，也可以问27落在哪个手指头上，并让他自己解释。然后可以问大一点的数，比如87落在哪个手指头上、129落在哪个手指头上。

这些事情我妈妈都对我做过，至今回顾起来不免心生惭愧。我没有取得过什么令世人瞩目的成就、没有上过什么世界名牌大学、没有官位、没有CEO的头衔，但是我的生活是幸福的，我能够给周围的人带来价值。我不奢求改变世界，也根本就没有想过要改变国家或者民族，我想的只是能

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

回报父母，不给自己的亲人添麻烦，自食其力，给我自己的儿子以榜样，这难道还不够吗？

一个孩子最扎实可靠的资本不是哈佛毕业，或者是什么冠军的称号，而是独立思考的能力。只有自己的学习能力、思维能力才是真正属于自己的东西，才不是外在的虚荣；只有自己有实力，才能够具备周遭可以取用的价值。

任何妈妈在阅读了这一回后，都能够做到带着孩子去数数，教孩子数

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

手指头，启发他们的兴趣。在妈妈的辅导下，孩子可以进一步主动追求自己的兴趣，从而成为一个自信、快乐的人。

数学诞生在手指上，指尖上当然有美妙的数学。

这个回合开篇的段落是从记忆力开始的。那么，指尖跳跃地数数儿的过程，与记忆力又是什么关系呢？

每个读者自己尝试一下，你能够回忆起来的事情，最早能够到什么时候？能够到六岁前吗？能够到3岁前吗？根据现代脑神经研究结论，人类的记忆力大约从9岁开始，21岁左右达到顶峰。而9岁开始能够系统记忆的能力，则一定程度上来自2岁时大脑髓鞘的发育和发展。手指连接大脑神经元，通过小脑处理信号，反馈到大脑加工，再一次发出指令，手指依

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

据指令而作出相应的动作。不断地往返，享受玩的过程，脑神经活跃，都能激发髓鞘的扩张、连接和伸展。其实玩的不是手指，而是通过手指激化了大脑的发育。

那么，为什么社会上流传着“上小学还用手指数数儿不好”的说法呢？如下四个都是可能的原因，哪个更加普遍？

（普遍程度较高的选项排列在前面）

A：很多来自传统的

说法都属于人云亦云

。

B：用手指数数儿就没有记忆力的锻炼机会了。

C：其实没有想过这些说法的依据，感觉好像是对的。

D：学校老师说过，要努力背下来，不能用手指。

（参考答案见全书末尾）



粗心到底是什么

◎儿童心理学让我了解到，孩子的本性越淳朴，就越不喜欢重复性的动作。如果妈妈换一个方法让孩子去做，那么主动性和被动性将会发生变化。

◎父母不要在孩子面前扮演无所不知的全能者，否则时间长了，当孩子养成凡事都问大人的习惯却遭到粗暴回绝时，他们探索世界的原生动力就在不经意间被消灭了。

1974年4月22日

星期一

小雨

今天算术考试，我带的草稿纸不够，举手老师就给我了。可惜只给了一张，还是不够，题目太多了。我是第一个做完交卷的，老师说萝卜快了不洗泥，让我再检查一遍，我没有检查，交了就走了。

1974年4月25日

星期四

晴

今天程老师特别表扬了我，以前我粗心大意，总是出小错误，这次算术考试全对，35道题都做对了。其实，我当时交卷的时候就知道自己肯定全对。老师让我给大家讲两位数乘法不出错的心得，我想了半天，什么都没有讲出来。

当看到自己这两天的日记时，我还是产生了不少疑问。按照如今自己聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

己为人师表的眼光来看，有什么讲不出来的东西吗？为什么我没有讲呢？

1974年，我当时上小学四年级，开始学习两位数乘法了。先是两位数乘以一位数，比如12乘以9、27乘以8等。老师教的方法是这样的：

12

x

9

108

我经常做成98。不过也不是每次

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

都错，做完作业妈妈肯定要检查一下，10道这样的题，我总会错上两三道。妈妈一说，我就知道又是我忘记进位了。忘记进位有两种可能，一种是没有标记进位，另一种可能就是口算乘法后忘记做加法了，直接就写了9。改正前一种错误需要孩子严格按标准的流程做到，2乘以9以后，立刻要点上一个点儿。改正后一种错误就需要训练记忆力了。妈妈知道我从小记忆力不好，上一年级起就要求我写日记，可惜一直都是断断续续的。晚上睡觉前妈妈提醒了，这一天我就记了

；不提醒，就忘记了。现在，这个记忆力的问题开始影响我的学业了，妈妈又想了一个办法，让我在做乘法的时候，运用下面的方式（图3-1）。

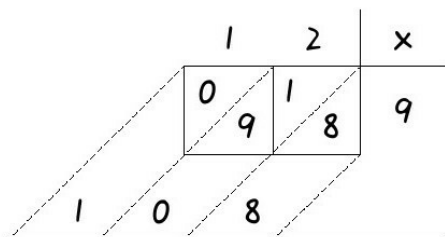


图3-1



不记得经过了多久，我很快就开始做两位数与两位数的乘法了，比如37乘以69（图3-2）。

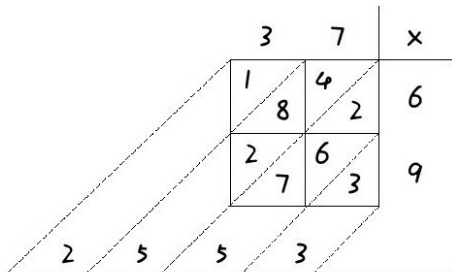


图3-2

按照妈妈教的方法，我一次就做对了。这个做法的过程中没有涉及加法与乘法的混合计算，而是先把所有的乘法都算完，然后再一起算加法。这样不用在下次算乘法的时候还要记住加上一次的进位，对记忆力的要求并不高。另外，这个算法不用理解学

校老师要求孩子强记的第二行错位（图3-3）。妈妈教给我的倾斜方向的算法，我根本就没有追问原因，而是当作神奇秘法之类的东西接受了。

$$\begin{array}{r}
 37 \\
 \times 69 \\
 \hline
 333 \\
 + 222 \\
 \hline
 2553
 \end{array}$$

图3-3

后来我进入北京师范大学，学习了儿童心理学之后才知道：孩子对于形式上明显的标志或者能够依赖的线条更容易接受；而对于按照某种格式来排列事物的接受程度就较低，除非将格子写在白纸上。比如，孩子从小喜欢画画，给他们不同尺寸的纸张，孩子开始动笔画画的时间就不同——拿到小一点纸的孩子动笔要快一点；或者在一张白纸上写字，如果画一个格子，要求孩子写在格子里，就容易一些。所以，妈妈教给我的格子乘法有很多好处，当然也有不足，那就是

需要不少纸，如果格子能够画得小一点，也可以节省一些。但比起总是把题目做错，多用几张纸就微不足道了。

后来，我开始学习两位数和三位数的乘法，再到多位数的乘法，用的一直都是妈妈教给我的格子方法（图3-4）。小的时候没有意识到自己的做法与其他孩子的不同，而且我作为一个非常调皮的孩子，自然也不会得到老师太多的关注。我小学前三年都很淘气，在算术学习上也一直给班级拖后腿，不是粗心大意就是马马虎虎

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

，要不就是丢三落四。这些词汇我学得最早，因为老师对我说得最多。我妈妈没有说过这些，却总是想出方法来扬长避短。直到我长大，自己当了数学老师。

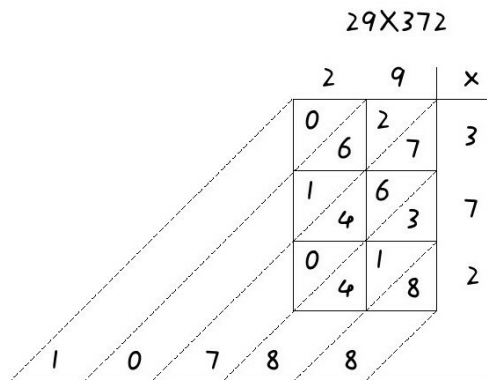


图3-4

当年妈妈教给我的方法在教科书中并没有记载，后来我查阅了许多英文的数学历史书籍，才找到这种算法的出处。这样一种来自1 000多年前古印度的乘法计算方式，妈妈是怎么知道的呢？面对这个问题，妈妈回答得更加简单：“你外婆教的。”“那么，外婆是干什么的？”“她是护士。”“那么她怎么知道的呢？”“我没有问过她。”……这样的追问恐怕只能停止在已经去世了的外婆那里。

留下的更多疑问得不到妈妈的解释，也就只能靠我自己去探索。小的聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

时候，我能够探索的不过就是把所有作业都做完，然后自己再去乘更多的数字。而自己当了数学老师以后，就有能力探索更加广阔的世界，在英文数学图书中找到更多的线索。看看图3-5，你是不是觉得很熟悉？这是中国小学数学书中的九九乘法表。再看看图3-6，你肯定能够看懂，却不一定熟悉，不像看到一种从小就熟悉的事物或者图像那样有亲切感。

一一得一									
一二得二	二二得四								
一三得三	二三得六	三三得九							
一四得四	二四得八	三四十二	四四十六						
一五得五	二五一十	三五十五	四五二十	五五二十五					
一六得六	二六十二	三六十八	四六二十四	五六三十	六六三十六				
一七得七	二七十四	三七二十一	四七二十八	五七三十五	六七四十二	七七四十九			
一八得八	二八十六	三八二十四	四八三十二	五八四十	六八四十八	七八五十六	八八六十四		
一九得九	二九十八	三九二十七	四九三十六	五九四十五	六九五十四	七九六十三	八九七十二	九九八十一	

图3-5

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
11	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132
12	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144

图3-6

图3-6是英国小学教科书中的九九乘法表。图3-5的表格有这样3个特

点：

1.运算与结果在一起；

2.格子与格子的关系是彼此孤立的；

3.乘法的方向是单向的。

而图3-6恰好是对应的，比如运算与结果不在一起；格子与格子是彼此有关系的，这些关系能够影响最终的计算结果；乘法的方向可以前后互换。在图3-5中，你可以找到三六一十八，却找不到六三一十八。但在图聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

3-6的表格中，你既可以找到3乘以6，也可以找到6乘以3。

通过这样两种表格学习的孩子，其思维也将形成明显的分化：图3-5的结果就是机械、教条，而图3-6的结果就是灵活、多变。两个表格都可以对孩子在10岁左右形成的思维造成影响，这些影响关乎孩子长大后的思维表现。

如果将这个大格子进一步拆分，就能得到一些小格子（图3-7）。如果你手里有许多这样的格子，比如4

乘以3、5乘以7，就可以组成图3-8所示的四个格子。这样列出全部的乘法格子，做两位数之间的乘法就可以变成一个动手参与的游戏了。只要挑出正确的格子，按要求拼出次序，做一次加法就可以解决问题了。

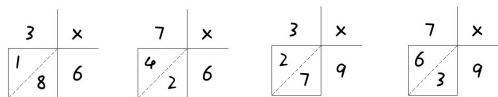


图3-7

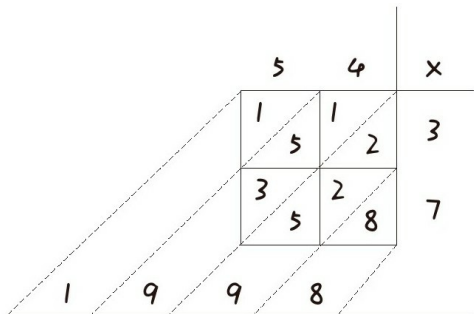


图3-8

从孩子学习新知识、新事物的过程来看，只要有机会参与、动手、体验，孩子在这些行为过程中就能够渐渐吸收许多东西。不同孩子吸收的东西虽然可能不同，但可以确定的是，都会有所吸收，比老师在前面讲、孩

子在底下听要有效得多。

能够调动孩子求知的兴趣，这才是妈妈最大的成功。成功并不是教会了孩子多少知识，而是把孩子追求知识的原始动机培养出来，也可以说是让它发育出来。这时，妈妈就退到了幕后，那个激发出来的兴趣会推动孩子自己向前走。

面对妈妈给我的乘法表格，刚开始我还看不太明白，但当妈妈讲解了对应的第一排与第一列之间的关系后，我就全懂了，而且看的时间越长，

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

就越能够发现其中许多有趣的窍门儿。比如，按照斜线去看图3-6，看到的数字就是1、4、9、16、25、36、49、64、81，然后就知道原来两个相同的数字相乘后就得这几个数。看的次数多了，也就熟悉了，熟悉了也就似乎可以不用眼睛看着表格就能说出来了。当只看这一条斜线的数字没有什么新鲜感和挑战时，就会自然地关注到这条斜线旁边的数字。新的发现继续产生，比如，这条斜线上数字都比其左下角和右上角的数字多1。看看36的左下角和右上角是不是都是35

，而49的两个斜角上的数字一定是48呢？这些都是我当年就看出来的。

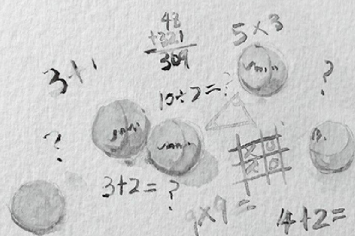
要相信，孩子不需要你向他指出这些，因为如果是父母指出的，孩子不会觉得新奇，反而觉得你是家长你当然知道，才不会觉得他自己有什么新发现。你能够做的就是吸引孩子看这个表格的时间长一点，如果孩子对数字渐渐喜爱了一些，能够专注地看这个表格超过10分钟，一定能够发现这个斜角数少1的窍门儿。接着，可能就会发现更有意思的事情，那就是比49少1的数字48，这个数是6乘以8

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

得出的，恰好是7乘以7前面少1、后面多1得出的。因此我自己推测出：17乘以19的结果一定比18乘以18的结果少1。通过计算我发现，还真是如此啊——前面的是323，后面的是324。

当然，这个表格肯定还更多的规律隐藏其中，比如斜线左右的数字是对称的，每行从左到右都是加上一个固定的数，这个数就是这行最左边的那个数。每列的数也是一样，从上到下都是叠加的，加上的数字就是这一列最上面的那个数。这些发现都应该聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

是孩子自己的发现，都是书本上没有写出来的发现——至少没有写出来发现的过程。而孩子体会到的发现的过程，可以说就是思维扩展的旅途。在旅途上所看到的新奇、新鲜的事情，都会当作自己的收获，这种收获会激发更浓厚的兴趣，积累更扎实的数字习惯和数字意识。这才是激发孩子兴趣的正确途径。



大人们，无论是父母还是老师，常常在孩子面前扮演无所不知的全能者。时间长了，孩子就真的觉得大人们都是无所不知的，也就会养成凡事都问大人的习惯，并最终把大人问烦了而遭到粗暴的回绝——“你怎么这

么多问题啊！妈妈忙着呢，等会儿再说。”要知道，多少好奇心就这样被随意地埋葬了，多少求知欲望就这样被轻松地扼杀了，多少探索世界的原生动力就这样被不经意地消灭了。展示给孩子一些耐看、耐想的东西，剩下的就靠激发出的兴趣驱动他们自己去发现。

通过孩子能够意识到的挫折入手，是妈妈激发孩子兴趣的好时机。我自己并不想做错题目，我当然也想一次就都做对，而且我不认为自己做过的题目再检查一遍有什么意义。妈妈聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

应该怎么做呢？回想一下你作为妈妈是怎么做的。是讲大道理，耐心劝说？还是直接下命令，说都是为你好、以后你会懂的？或者你还用诱惑的方式——你就检查一遍吧，妈妈给你糖吃？这些都不对，你真心希望他自己检查一遍吗？

请身体力行，让孩子看到你平时也是这么做的，要不就亲自替他检查。检查到错误后，不要立刻表现出不高兴的样子，说：“瞧，你这不是有错吗？”或者满是埋怨的口气：“怎么上次讲过的还错呢？”孩子毕竟是孩

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

子，他们出错是正常的，这也是大人们找到好方法的机会。此时，你要帮助孩子换一个方法来重做一遍原题目，比如我做错了12乘以9，我妈就用一张白纸重新写了一遍，并教给了我另外一个法子。这样在我的心理上，就不是指出我有错误，而是让我好奇，原来还可以这样计算，用的不是学校老师教的那个法子。后来发现两个方法的结果不同，我就开始核对，并重新做一次，这时重新做一次是自愿的，是出于核对两个不同结果的兴趣，而不是被迫地、被妈妈吆喝着去机

械性地重复一遍相同的劳动。

儿童心理学让我了解到，孩子的本性越淳朴，就越不喜欢重复性的动作。重复能够让这个动作更加娴熟，但对急于认识新世界、新鲜事物的孩子来说就不太适用。你让孩子自己检查作业，不就是让他做一次重复性的工作吗？如果你换一个方法让孩子去做，那么主动性与被动性就发生变化了。一个是因为你的要求而不得不重复，重复的时候他并不会表达自己内心的痛苦、抗拒、纠结，估计大人们也看不出来；另外一个主动的，不聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

是重复，而是换成了另外一个法子来应对，这时的动力来自于自己，并在发现两者有不同的时候，不用等大人们说什么，而进一步地主动去找到原因。

目前教育界常说的启发式教育不过就是如此。可惜，教育界内讨论的所谓启发式教育，都没有真正从孩子认知的次序和能力上切入，还是成人想当然地觉得他应该会这个，他应该有积极主动的行为来重复检查，等等。只要妈妈留心自己的孩子，当发现他出现错误、失误、挫折的事情很多

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

时，能在他面前换一种方式重新做一次，就比仅仅口头教育他重新做一次要更加深刻、更有刺激性。总之，要通过孩子的挫折和失误寻找激发兴趣的机会。

作为一名教育工作者，我自己都不知道如何去推动一些教育内容和教育方法上的变革。比如，我多么希望小学课本能给孩子提供两种计算乘法的方式，而不仅仅是一种竖式的方法；至少给孩子提供机会选择他们自己偏爱的方式来计算乘法；至少在教科书中提供图3-6所示的乘法表，而不

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

是图3-5所示的乘法表，或者至少能够提供两个乘法表。这么做的目的并不是卖弄大人们有多少新颖的法子，而是给孩子们更多的选择，让孩子能够建立不同的习惯模式，而不是千篇一律，都是一个套路、一个模子雕刻出来的一样的思维。

我自己就是一个与许多同学不同的人，遇到事情总是有不同的想法、不同的视角，而这些想法与视角总是能够得到同事、同学、老师的欣赏，并好奇我为何总是用不同的方式来思考问题。追本溯源，唯一合理的解释

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

应该就是妈妈不断示范给我全新的做法、不同的应对思路。那么多不同的方式，让我比同学更准确、更快，这都使我坚信自己的方法没有什么错误。与众不同的道路也能够实现快乐的人生，这个过程本身不就是价值吗？

格子里有无尽的数学，有美妙的启迪，有太多太多新的发现等待孩子去探究。格子里的数学会给读者——你，这位妈妈带来什么启发呢？

妈妈教的数学

- ◎ 你完全可以把格子画出来，展示给孩子看。测一测他是否有兴趣在格子里写上数字，你写几个以后，问他另外几个分别该写几。
- ◎ 如果孩子在掌握了一些加法后，自己提出一个新的问题给你，你应该感到高兴，至少他在尝试去模仿你给他出题目的做法。
- ◎ 陪伴孩子去发现那些在表格中隐藏着的规律吧。

关于第二点，比如在掌握了简单的一位数加法后，有的孩子就会不断问你新的数相加的结果，如7加9、10

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

加15，甚至有可能问你100加40是多少。从儿童心理学角度来看，这种表现是形成模式的阶段，作为父母，可以给他正确的答案，但要把自己计算的过程讲出来，讲的细节步骤越详细越好。讲了几次后，当孩子继续问时，就可以摸到一些线索了。

观察孩子对你前面讲的内容是否理解或可以模仿。孩子每次提出的问题不同，代表他在寻找不同点之间的规律。你可以这样说：“100加40，100呢，就是10个10；40呢，就是4个10；那么10个10，4个10，就是14个10

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

；14个10，其实就是140。”讲完后，一定要给孩子再出一道题，比如100加30是多少，让孩子发现你话中的规律。孩子问99加66的话，你可以说：“99加1等于100，100再加66的话，就是166了。开始的时候没有那个1，是我故意加上的，所以要扣除出来（不要用‘减掉’、‘减法’这些术语，否则问题就会被转移到新术语的意思上了）。这样的话，166扣除一个1应该是几？”

你能做一位什么样的妈妈是你自己的选择。缺乏足够的信息、故事、
聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

案例，那不是你的错。但给了你足够的信息后，做不做，就完全是你自己的事了。

丢三落四、马马虎虎、粗心大意。这些词汇都是老师用来说我的，小时候，我甚至觉得这些词汇简直就是专门为我做数学题而发明的。长大后，我学会一件事，普通人做任何事情，只要有10%的出错情况，就说明，做事情的过程有问题，应该改善的是做事流程。通过流程的形式降低错误概率，而不是追究孩子出错这个事情，大人还会出错呢！出错才是学习的机会。并不是让孩子觉得“我又错了”，“我老是错”；长大后，脑海中都是出错的记忆碎片，而没有快乐的回忆

。父母生一个孩子，难道就是为了通过指责孩子的错误来体现自己的责任心吗？

其实，孩子自己也不希望出错。得知自己做错了，对自己也是一种精神的挫伤，类似刮蹭。刮蹭时间长了，次数多了，也就无所谓了。对孩子来说，大人不去纠正做题的过程，而指责孩子出错，并归结

原因为不专心、不认真、不集中。如下四个都是对孩子的刮蹭，哪个是长期影响的、伤害最持久的情况：

（影响及伤害程度较高的选项排列在前面）

A：失去对父母的爱

。

B：失去对自己的信任

。

C：不再喜欢这个学科

。

D: 不再愿意做题。
(参考答案见全书末尾)



默想是智力发展的敌人

◎5岁前养成的习惯往往可以本能地维持一生。尽早培养孩子说出自己的思考，可以是对自己讲，也可以是对家里人讲。

◎数学也是一样，玩儿一样说出来，说多了也就形成印象了，就融会贯通，成为自己熟悉的事情了，也就不再感到害怕了。

1972年2月21日

星期一

晴

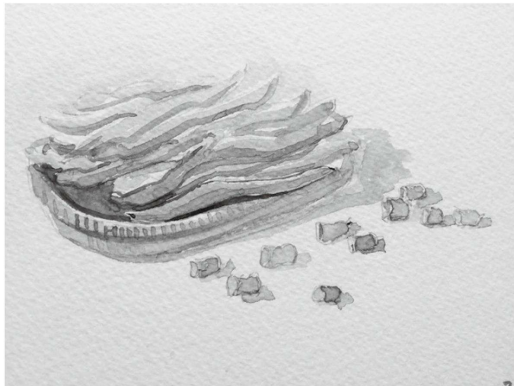
今天开学了，二年级的第二学期。今天算术课教了两位数加法，还教了算术题。作业中有一道题不会做，晚上妈妈回来得晚，没有给我讲。“两个牧羊人在一起，一个说，给我8只羊，我们两个的羊只数就相等了，另外一个说，不用，如果你给我8只羊，我就比你多一倍了。”想不出来，就睡觉了。

1972年2月26日

星期六

阴

今天星期六，放学早，妈妈在家，我帮她洗菜、切豆角，把豆角切成一段一段的，我切好的放在我碗里，妈妈切好的放在她碗里。完成后，妈妈让我洗手，她把两个碗里的豆角小段都倒在了大盆里，洗了洗，又放到了两个碗里，然后妈妈让我数豆角数。我的碗里有40段，她的碗里有56段，妈妈说，如果她给我8段，两个碗里的豆角数是多少呢？我重新数了一遍，都是48段。妈妈说，那么我们两个人的豆角数就一样了对吧？妈妈混合了一下，又让我去数，这次还是我的碗里40段，她的碗里56段，妈妈从我的碗里拿走了8段，然后我说你的碗里是 $56 + 8 = 64$ 段了，我重新数了一下我碗里的，还剩下32段。妈妈问我，两个32是多少，我算了一下，是64。妈妈问，你还记得原来两个碗里分别是多少吗？



看过这段日记，我向我妈求证当时的具体情况，妈妈说不记得了。不过我问妈妈中间的日记怎么没有，妈妈说你懒呗，让你记你不记，说等到星期六多写一点，我就由着你了。

我是家中的老大，从小调皮捣蛋、喜欢恶作剧，总是不听大人的话，我爸经常说我是逆子，但妈妈没有说过。她身体不好，估计是没有力气说我，不写日记也就不写了，由着我说星期六多写，没想到我还真在星期六写了这么两张纸的日记。妈妈回忆了那天的情况，唯一还记得的就是那天最后做的是炒豆角，因为她隐约记得我一直在摆弄两个碗里的那些豆角段。那太好玩了，两个碗里的豆角段数相差16，一个是56，一个是40。我在日记本中这一天的后面看到了这么一

行：

1972年2月28日

星期一

只有我把羊数说对了，老师说我与龙梅、玉荣一样，对国家财产记得清清楚楚。

读者朋友，我不知道你是谁，也不知道你的年龄，所以不确定你是否知道龙梅、玉荣对我们这些20世纪60年代出生的人的意义。那可是大英雄，我们的榜样啊！她们都是小学生，却做出了无比勇敢的事。老师如果说我与她们一样，那可真是光荣极了。我那天肯定非常高兴。

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

其实班里把羊数搞清楚的还有一半同学，但只有我在回答老师问题的时候讲清楚了。老师说他没看出来，这么调皮的孩子，脑子还挺好使的，可惜当时的具体字句现在是记不全了。后来我在教小学三年级的时候，特意要求学生做这个题目时把自己的想法说出来。

两个牧羊人在一起，一个说，你给我8只羊，我们两个的羊只数就相等了。另外

一个说，不用，如果你给我8只羊，我就比你多一倍了。问：原来两个牧羊人各有多少只羊？

我记录过如下的算法：

韩晓梅： 如果一个牧羊人给另外一个人8只，两个人的羊数就相同了，就说明之前两人的羊数差16只。反过来，从少的那人那里拿走8只给原本羊就多的那人后，两人应该差32只。这时，一个人的羊数就是32只，另外一个人是64只。把挪过来的

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

羊补回去，那么原来那个人就是 $32+8=40$ 只，另外一个人是 $64-8=56$ 只了。

以上内容摘自我1985年10月27日的日记，这个叫韩晓梅的学生应该是北京第二实验小学三年级的学生。当时我正在北京师范大学附属实验中学当数学老师，受学校委托组建小学奥数班，主要从北京第二实验小学三年级招收学生。当时从8个班中，我们招来了21个孩子，韩晓梅是其中的一位。另外一位叫许军的孩子还有一种算法。

许军： 如果一个牧羊人给了另外一个8只就多一倍了，这个时候两个牧羊人之间羊的数量相差16只，多的一倍就是这16只，那么16只加16只，就是32只。把拿走的那8只还回来，这个牧羊人就有40只，而另外那个人有56只。

两个人都得出了正确的答案，但许军的说法更跳跃一些，隐含的理由较多，而且更快——韩晓梅用了一分半，许军用了不到一分钟。

我不记得自己当时究竟用的是韩晓梅的算法还是许军的算法了。我能够记得的是，每次做类似这样的算术

题，妈妈都要求我把思考的过程说出来。就如同当年数碗里的豆角段，每次挪动了豆角段后，我都会把碗里还剩下的数出来。清点的过程可以不断强化对眼前材料的感觉。把实体的材料在手里拿过来、拿过去以后，就渐渐在脑海中成型，说出来，题目也就得到了解答。

当时在班里，许多孩子都能够做出这道题目，但至少能够把过程讲清楚的我是第一个，是不是还有第二个、第三个，由于老师没有再叫其他小朋友回答，我也就无从知晓了。把思聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

考的过程说出来，这个方法是从我学习加法妈妈就开始要求的。一位数相加的时候，就必须这样说：6加7就是从6开始数数，7、8、9、10、11、12、13。所以6加7等于13，数了7下，意思就是6加7了。

当时我还小，妈妈会配合手指头来表现。她是这样做的：先让我用手指头摆出6来，然后她自言自语地用自己的手指头摆出7来。我自己数完手里的6以后，就跳到她的手指头上，接着6继续数，数完她已经摆好的7个指头，最后那个指头就是13。当妈

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

妈发现我有跳数的习惯或者我在转换到她手上时有不敢继续的犹豫，她都鼓励我大声读出来，渐渐地，我的胆子也就大了，就更加敢数了。说出思考过程是一个重要的启发智力的方法。能够说出来的思考，印象也会更加深刻。

我自己当了数学老师以后，尤其是在带小学奥数班的过程中，对这些十多岁的孩子的要求就是在拿到题目后要大声念出来，然后继续说下去，想到什么就说什么。他们在解题的时候确实会慢一点，随着边想边说的习

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

惯慢慢形成，解题的思路就越来越清晰了。我们通过听他们的思路，也能够准确地把脉孩子解不出题目的症结之所在。

有些妈妈陪孩子学习，看着孩子的眼睛滴溜儿地转来转去，知道他在思考，却不知道他在思考什么，也不知道他思考的方向是否正确，直到孩子说出了结果，妈妈才知道对错。其实，这已经失去了把脉的最佳机会，也就是对过程的关注。要求孩子说出来其实并不难。

现在，我学生的孩子都渐渐长大了，有时这些学生回来看望我的时候也会带他们的孩子来。有一个4岁孩子的妈妈自豪地说：“不光是加法的问题，我这孩子连减法都会了。”我有些惊讶，于是问孩子， $37-13$ 是多少啊。孩子张口回答：“37先减去10，就是27，然后27再减去3，就是24。”确实厉害，并不是答案正确才厉害，而是有本事把思路说出来才厉害。原来，我这个奥数班的学生从我这里受到的最重要的启发就是利用说话推动思考。在美国科研机构工作的她

自己也是受益者，经常因为能够率先把思路说清楚而得到重用。有些学者能够在纸上完成的东西，就是无法通过语言表达出来。这两种能力有着重要的差别：能说出来的人有优先权，当然也一定能够写出来；而能够写出来的人却不一定能够说出来，通常也会丧失机会。

我在小学前做20以内加法的时候，经常被妈妈要求把想法说出来。比如12加7，那就是从12开始数数，数完7次停留的那个数就是相加的结果。我的说法是，现在是12，然后是13

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

、14、15、16、17、18、19，数了7下吧，12加7等于19。12加16的说法是这样的：12先加一个10，就是22，然后数6下，23、24、25、26、27、28，所以12加16就是28。

5岁前养成的习惯往往可以本能地维持一生。尽早培养孩子说出自己的思考，想到什么要讲出来，可以是对自己讲，也可以是对家里人讲。说出来的任何内容都是对自我意识的超越，建立在自我思维的水平之上。这就相当于为自己制造了双核的计算机处理器，无论是在速度上还是深度上

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

，都肯定能够超越单核的处理器。

以下展示的是我更多的教学记录，做题人都是从奥数班选出来的孩子。

一个院子里有鸡和兔，大人看不清楚，只能看清有**35**个头，还看到了**94**只脚。问：其中有多少只鸡、有多少只兔子？

刘晶晶： 有35个头就是说兔子和鸡一共35只。都是鸡的话应该有70只脚才对，多出来24只脚，肯定是因为有兔子。兔子的脚比鸡多两只，那就是12只兔子了，所以，35只动物中12只是兔子，剩下的23只就是鸡。

程哲： 有94只脚，如果都是鸡，就应该有47个头，实际却

只有35个头，少了12个头，这12个头就应该是脚多的兔子。所以35减去12只兔子，就是23只鸡。

当时班里有人做不出这个题目，听孩子自己说出思考过程我才了解到

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

，做不出来的孩子是因为没有见过兔子，也就不知道兔子有4条腿。脑海中没有兔子的概念，做这个题目的难点当然就不是思考，而是根本就没有理解题目。一旦对题目理解了，那些绕弯的数学思维也就易如反掌了。

140个乒乓球被放到了两个篮子里，从其中一个篮子里拿出**15**个乒乓球放到另一个篮子里，两个篮子中球数就一样了。问：

原来每个篮子里有多少个乒乓球？

王放： 140减去30是110，一半就是55，那么原来一个篮子中是55个，另外一个里面是85个。

张诚东： 一共140个，如果球数相等就是一个篮子里有70个，所以拿走15个，就是55，多了15个就是85。

当你能够收集到自己的孩子对这些题目的反应的时候，你才知道孩子脑海里的思路是多么简洁、多么优美

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

。尽管许多孩子都能够得出一样的正确答案，但却有那么多不同的过程、不同的走向、不同的线索、不同的习惯。让他们说出来的同时，孩子之间也分享了更多的思路和方法。作为妈妈，你至少可以先让自己养成说出来的习惯，然后再示范给孩子，甚至可以从孩子手边正在做的事情开始，比如让他说“我现在去上学”、“我到家了”，等等。

约占87%的中国大学毕业生评价自己性格内向，这是一个多么大的比例啊！那么，这么多不善于讲话的人

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

彼此之间如何合作呢？都单打独斗吗？培养把思考过程讲出来这个习惯不仅有助于建立并梳理其数学思维、提高数学思考能力，还能够改善其性格，提高语言表达能力。这也许就不仅仅是学好数学这么单一、简单的事情了，更有着影响人一生为人处世的重要意义。

回顾自己40多年前的日记，我常常感慨妈妈的用心良苦。某道题没有完成时，我以为妈妈回来晚了肯定就不会看我的作业本，后来才知道，妈妈会在我入睡之后，一页一页地看我

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

的作业本。那些掐豆角的记忆碎片，长大后要通过日记才能够前后拼凑起来。原来整个就是妈妈布的一个局，事先设计好了前后次序及道具，并任由我玩这些将要吃的东西。不像隔壁邻居家的妈妈，孩子玩了米都要挨一顿骂。不过也不难理解，那个时候贫穷，家里有点米，那是珍贵的粮食，怎么能拿来玩呢？后来我与邻居家这个孩子闲聊才知道他玩米的游戏内容。我当然毫不示弱，立刻就把家里的米袋弄出来了，当时真不知道数大米能够耗费那么长时间。

他比我高两个年级，他说学校老师讲了一个故事。传说很久以前，有一个国王奖赏大臣，不知道大臣想要什么，就让大臣自己说要什么。大臣就说了，你看见那个有64个格子的棋盘了吗（图4-1）？第1个格子放1粒米，第2个放2粒米，第3个放4粒米，第4个格子放8粒米，第5个格子放16粒米.....64个格子的米都给我就行了。国王听了哈哈大笑，说：“大臣真是不贪功啊，就要这么点奖赏，给了！来人，去粮库拿一袋米来。”国王派人开始放米，结果最后，大臣被拉

出去砍头了。

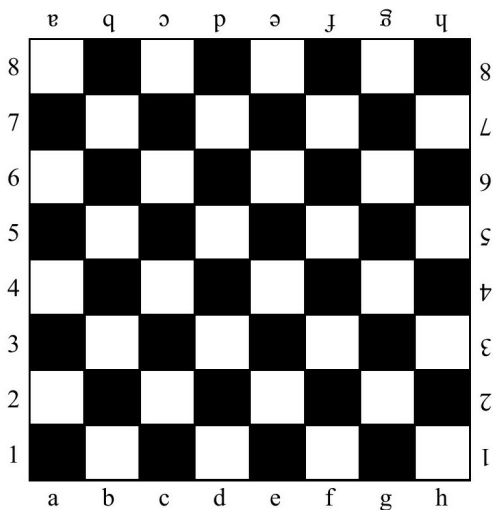


图4-1

我这个邻居小朋友肯定是上课走

了神儿，我问他为什么大臣被砍头，他说不知道。所以，他回家后就开始在棋盘上摆米，结果被他妈妈骂了一顿，差点还被他爸打一顿。小时候的我肯定是愣头儿青，拿出我家的米就开始在他家的棋盘上摆了起来。直到后来长大了，我才知道这个故事的来龙去脉。人家故事里说的其实是国际象棋的棋盘，他家只有中国象棋（图4-2），那棋盘是不一样的，所以我们摆到第4个格子时就恍惚了。你看一下第4个格子，中间有一条斜线，老师没有说这样的格子应该当成一个

格子还是当成两个格子。争议不清，我们只能当成一个格子来放米。这一行到最后一个格子的时候，已经不太容易将128粒米都整齐地放进去了；到第二行的第一个格子困难就更大了。

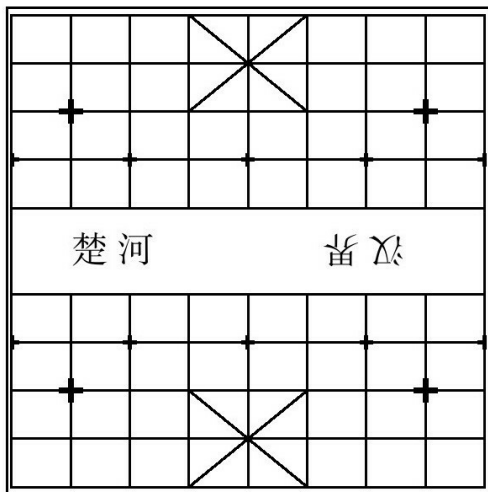


图4-2

这时，我们将书包中的书本都拿了出来，当作其中第二行的格子来放那些米粒。4本书、3个作业本都堆上

了米粒。第三行第一个格子的米粒更多了。我们正在想怎么摆这第三行的时候，我爸回来了。我妈一直都在家，知道我们在玩米但没有管我们，我爸回来发现楼道地上摊了一个棋盘，旁边是书本，上面都是大米，严厉地问：“你们干什么呢？”“我们给大臣算奖赏呢。”

我记得那天是下午两点多到家的，开始弄这一袋米差不多就是这个时候，到我爸回家已经快六点了，我们俩连第三行都还没开始摆呢。我脑海里关于那天玩米的经历大概就是这些

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

了。今天回想起来，我还是会疑惑，那到底是多少米呢？为什么后来国王干脆杀了那个大臣呢？

为了把这个问题弄清楚，我干脆自己重新来数大米。我数了10粒米一堆儿的，50粒米一堆儿的，100粒米一堆儿的（图4-3），等到500粒、1 000粒、10 000粒时，已经耗费了两个多小时的时间。然后，我开始计算到底应该给多少大米，其实就是：

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1024 \\ + 2048 + 4096 + 8192 + 16388 + \cdots = 2^{65} - 1$$

这到底是多少大米？我测量了一下我手里现有的大米，大约40粒米是一克，那么1万粒大米就是250克，4万粒大米就是一公斤了。上面那个数字太大了，就算变成重量，也要大概9 000万吨大米。现在全中国一年的大米产量不过就在3 500万吨左右，也就是说，当时那个大臣要的大米量放在今天都拿不出来，何况那个时候，所以国王就狠心把这个大臣杀掉了。

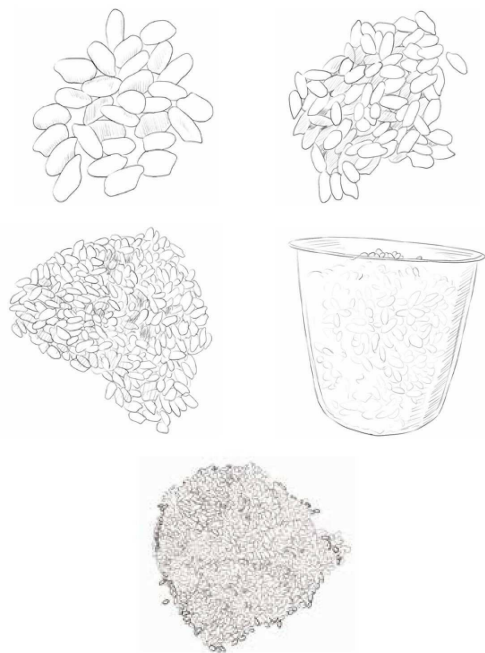


图4-3

这里的重点不是计算出多少大米，而是听完这个故事之后会有多少小朋友较真儿地去数一下、算一下，自己来发现其中存在的各种各样的问题，而不是听过故事就完事了。我问过我妈妈关于这个故事的许多细节，比如当时国王用了多长时间来数大米并放到格子里？当时参与数大米的人有多少？当时他们是不是把64个格子的大米都数完了？当然，最后肯定是因为没有米了，还有好多格子没有填上。那么，数到第几个格子才发现粮库里一点米都没有了呢？

这样追问细节是出自严密的思维，还是出自好奇心？孩子最初能够提出许多这样的问题，其中有一些有逻辑、有含义，有一些可能无厘头、毫无意义，但父母不能因为潜在的问题就打压孩子提问的行为，这样不仅会导致他们再也问不出问题来，而且会让孩子对听到的、看到的事情不再进行深入的思考。

不打压孩子玩米的行为、不打压孩子提问的行为，这些都是我的妈妈无意中做到的。说出解题的过程，说出听到故事时脑海里涌现的疑问，或

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

者说出好奇的联想，这一点对我来说就是本能，是环境造就的。我没有被打压过，没有因为求知好奇、探索新鲜事物而被训斥过、被惩罚过。我的这些习惯，我发现我弟弟身上也有。这就不是偶然的了，而是在一种共同环境下成长留在人身上的烙印。

读完这一回，作为孩子的妈妈，你决定做些什么呢？

妈妈教的数学

◎ 你能够做到每天至少三次在

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

孩子面前把自己的思考过程说出来吗？

- ◎ 你能够耐心倾听孩子诉说自己的思考过程吗？
- ◎ 你能够给孩子更多的空间，让他随意探索家里的任何事物吗？

人类与动物的不同在于有语言。西方哲学就起源于苏格拉底的谈话，他的哲学体系、逻辑体系是说出来的。把自己的思考、思想说出来，让孩子养成这样的习惯，将对他探索任何事物都有帮助。数学也是一样，即使玩儿一样说出来，说多了也就形成印

象了，就融会贯通，成为自己熟悉的事情，也就不再感到害怕了，这就是说着玩儿的数学啊！

用心倾听饭桌上的聊天，人们说一个事情的时候，用了很多话，比如用了300个字，然后理解一下这个事情，看有没有人能够用200个字说明白，或者有人用100个字说明白。语言是思维的反映。做数学题尤其如此，一些题目不会做，实际上是没有理解。任何题目都是浓缩了的，精练的语言表达，孩子在学习时，尝试把题目用自己的话说出来，这就是一个训练——思维的训练。说的过程，有时就开窍了，一下就明白了。

那么，学校体系

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

内，这种把题目说出来的做法并不普遍，这样符合规律的事情，是什么原因没有得到普及呢？下面都是可能的原因，你认为哪个可能性最大：

（可能性较大的选项排列在前面）

A：老师其实也不知道认知心理学原理。

B：学生人数太多，听不过来每个学生讲。

C：中国文化有默想、

静思的传统。

D: 学生已经被打压惯了，不想说。

（参考答案见全书末尾）



应用题的关键难点

◎从孩子早期接受数学概念的能力来看，语言理解是最基础的一关，也是最初的难点。培养孩子对数学词汇的熟悉、理解，并渐渐形成认知。这样，当孩子再遇到应用题时，题意理解这一关就可以轻松跨过了。

◎生活中越经常地接触到具体、具象的数量，并得到及时的启发，孩子就越具备主动走向抽象的能力。

1974年1月27日

星期日

晴

今天下午全家包饺子，我学会了用皮儿把 xi ā n 包起来。妈妈说正月初五应该吃饺子。我包了8个，爸爸包了47个，妈妈负责 g ā n 皮儿，我还包了一个有糖的饺子，晚上我吃到了这个糖 xi ā n 的饺子。爸爸比我多包了39个饺子。

1974年7月18日

星期四

晴

今天上午开始妈妈就在准备面、xi ā n。妈妈说今天是吃饺子的日子，要包扁豆 xi ā n 的饺子。爸爸下午回来后就开始包了。我包了24个，爸爸包了24个，妈妈包了8个，一共包了56个饺子。我与爸爸包的饺子一样多，我包的是妈妈的3倍。

我15岁以前有关饺子的日记，只有这两篇。从这两篇日记中，可以看

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

到一个11岁男孩生活中数字的若隐若现。数学的基础就是数字，数字不仅可以写成文字，还是一个数量，即字面的后面是一个量。能够知道有多少个饺子是对量的认识，而能够知道谁包的饺子多，就是对量的比较，比较能够强化对量更加深入地认识。数学就是从这种对量的比较中逐步建立起来的。



对孩子来说，比较的事物必须要有具象的意义，这两篇日记中体现的就不是单纯地比较数字，而是用来解释现实生活中饺子的数量。包饺子对孩子来说很好玩，是一个动手参与的过程。我妈妈在我玩的时候顺便让我

理解了数量之间的比较，更重要的是理解了爸爸比我多包39个饺子的数量意义，理解了一样多的实际意义，理解了我包的是妈妈的3倍的具体意义。

这里有一些词汇，读者朋友们不妨先看看自己是否理解：

乘积 扩展 增加 减少 相差 相同 最小的 最大的

最多的 最少的 一样 一半 两倍 同向
相向 相遇

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

这里仅仅列举了16个词汇，都是小学数学教科书中出现频率较高的，尤其是在应用题中会大量出现。这些也恰好是孩子在做应用题时常遇到的最大难点。对孩子来说，难点不是数字之间的运算，比如孩子很容易计算 $47-8=39$ ，却不容易把爸爸比我多包39个饺子变成数学意义上的减法。也就是说，孩子在面对应用题时最大的障碍在于，能否正确地理解一段语言表达的意思，尤其是能否将这段语言表达的意思变成数学上加减乘除的运算形式。

读者朋友们，如果你们不介意的话，请再接受一个挑战，那就是把上面那16个词汇讲给自己的孩子听，看他们是否能够理解。检验他们理解与否的方法就是让他们举出例子来，比如用他们生活中自己看到的、听到的、数过的东西来讲解。

正如妈妈让我包饺子的过程，真的不光只是好玩的包饺子而已，更是润物细无声地讲解了抽象的数学概念。如果孩子能比较自然地理解这些抽象的数学概念，下面这几道题就容易多了。

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

有三根铁丝，第一根的长度是第二根的6倍，第三根的长度是第二根的一半，第二根长10厘米。现在要把它们截成一样长的铁丝而且无剩余，并且要使每段铁丝尽可能地长。问：可以截成多少段？每段长多少厘米？

有两列火车，客车长200米，每秒行驶

30米；货车长**300**米，每秒行驶**20**米。两车在平行轨道上齐头同向行驶，问：几秒后客车超过货车？如果两车相向而行，从相遇到错车而过需要几秒？

三年级三个班的少先队员为美化校园环境自己动手种花，一共种了**265**盆。一班种的是二班种的**2**倍，

三班种的比一班种的多**5**盆。问：三个班级各种了多少盆？

画展**9**点开门，但早有人排队等候入场，从第一个观众来到时起，每分钟来的观众一样多。如果开**3**个入场口，**9**点**9**分就不再有人排队；如果开**5**个入场口，**9**点**5**分就不再有人排队。问：第一个观众到达的时

间是**8**点几分？

这4道题都涉及抽象的语言概念，分别是：6倍、一半、无剩余、尽可能长、同向、相向、错车、2倍、多5盆、每分钟一样多、不再有人排队。以上4道题都选自一些小学奥数类的图书。编写这些奥数训练图书的老师都是小学老师，经验丰富，对数学思维的运用也很熟练。但最大的缺陷就是，这些图书是从编写老师的视角出发的，题目中涌现出大量抽象的语言词汇，其实并不是在测试孩子数

学量化的能力，而是在测试孩子对抽象语言的理解能力。而图书中最缺乏的就是对词汇的注解——对词汇进行简单解释，用孩子易懂的话来把事情讲明白。

我也是在从事了数学教育之后才渐渐理解了那些书本上的心理学术语的含义，比如，具象的事物对认知过程的意义总是大于对抽象词汇的理解。一项针对来自俄罗斯、德国的天才儿童的研究揭示了如下3个结论：

- 天才儿童的卓越之处主

要体现在对抽象词汇、抽象关系的掌握中。

- 生活中越是经常地接触到具体、具象的数量，并得到及时的启发，孩子就越具备主动走向抽象的能力。
- 数学方面的天才都具备对语言中词汇的特殊理解能力。

比如前面的第1题，如果妈妈能够在孩子面前摆出三根线来，让孩子一根一根地测量，这道题完全可以做

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

出来。并且在做的过程中，孩子能够渐渐理解“6倍”、“一半”、“尽可能长”的意思。如果一定要用数学语言来说，这道题背后的概念就是“最小公约数”，但完全没有必要让孩子去理解“公约数”这个概念，用现实中缝衣服的线来实际演示就可以了。等孩子非常熟悉并可以快速地自己做类似的题目后，他的脑海中便会形成一个概念，他会用自己的词汇来解释这个概念。到那个时候，再告诉他这就是“公约数”的意思。

我的一个学生是这样思考的：第

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

二根长10厘米，那么第一根就是60厘米，第三根就是5厘米。一段只能长5厘米，这样所有铁丝就都用上了，第一根可以有12段，第二根做成2段，最后一根只有1段， $12+2+1=15$ 段，每段长5厘米。

这个学生理解“无剩余”的意思就是所有铁丝都用上，那么就只能将就最短的那一根，即5厘米，因此“尽可能长”这句话其实没有意义。这个孩子接着这样说道：“如果你要尽可能多一些段，我能不能剪成1厘米长的？”这个学生算是理解了“尽可能”的

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

意思，也理解了“一半”、“6倍”的意思。

目前的学校教育中，老师完全没有时间来摆出具象的铁丝，也没有意识培养孩子自己去形成一个概念，而往往是先灌输给一个孩子肯定不懂的词汇，然后再给这个词汇许多解释和说明，看哪些孩子能自己悟出来，就代表他们懂了。但正常的儿童认知发展次序却完全不是这样的。如果孩子强迫自己记住老师要求的操作模式而心里并不真正懂，再通过大量类似题目的训练养成本能，日久天长，孩子

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

的认知理解层面就与操作层面脱节了，失去了思考问题、提出新问题的能力，而变成了机械操作的“机器”。

改变学校的教育并不容易。撇开对孩子学习认知的正确理解不说，面对这么多学生，要保证每个学生都能跟上，在时间短、任务急、教师少的情况下，家长们不要对学校有过高的期望。还是从父母自己开始吧，至少父母应该是孩子最早的启蒙老师。你也可以掌握正确的方法，那就是在生活中寻找大量的机会来讲解具体的数量，并给孩子一个机会，让他自己去

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

形成认识，并学会熟练应用、学会提炼，形成含量丰富的词汇。

按照这个要求来做的话，第二题应该从做模型开始：给孩子摆出来两辆车的模型，演示什么是相向、什么是同向；然后再演示在相遇的点，错车实际是什么样子。这就是具象教育的操作方法。

我在澳大利亚也从事过中小学数学教育，接触到了大量的具体模型，尤其是在澳大利亚的小学教育中这种模型更多。澳大利亚小学生的数学水

平无论在熟练程度上、技巧上，还是做题的速度、准确性上都无法与中国学生相比，但是在面对新问题的時候，他们提炼的能力非常强，解决问题的思路也更加多样、灵活，能够实际深入到面对的问题的本质，这些能力都是中国学生严重缺乏的。于是渐渐地，在澳大利亚社会就形成这样一种局面：澳大利亚人在企业中做高层，提炼出遇到的问题，并给出解决思路，然后交给中国人来具体做出解题过程，并给出正确的答案。比如在保险公司，提出新保险项目的人几乎没

有华裔，而实际计算出赔率、赔付比率的几乎都是华裔。这个结果其实就与教育的过程有关。强调具象到抽象的形成过程，而不是强化抽象符号的高速计算，这样就能够培养出另外一种能力来。

作为妈妈，你应该可以思考：你想让孩子具备哪种能力？两种能力是否可以共同拥有？当然！完全可以。两个能力有次序的先后，也有教育过程中的侧重比例。至少目前中国的情况就是只顾一个方面，而几乎完全忽视另外一个方面。

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

对于第二题，最难的地方仍然是对语言的理解，比如“同向”、“相向”还有“超过”的意思是什么，“错车而过”又是什么意思。

有了模型，解释“同向”、“超过”就容易得多。同样，解释“相向”与“错车而过”也就容易了。具体的算术问题其实非常简单，不就是300米用多长时间、500米用多长时间嘛！如果没有模型，那就用视图，通过画图的形式来让孩子体会到超过、错车而过的意思（图5-1）。虽然数学考试不是考理解语言，但是不理解语言，
聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

孩子就可能做不好数学题，而卡在理解上。

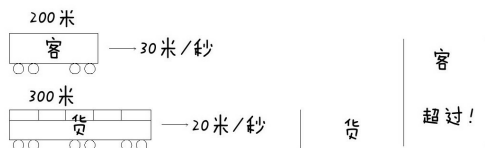


图5-1

从孩子早期接受数学概念的能力来看，语言理解是最基础的一关，也是最初的难点。许多女孩子过不了这一关，就认为自己没有学习数学的天分，也就“合情合理”地自我放弃了。但这个难点将一直存在，并终生影响

对生活中一些抽象事物的理解，比如利率的用途、汇率的用途、利息的滚动计算等。所有抽象的数学词汇都是之前许多数学家从现实生活中提炼出来，并用他们的词汇来概括的，而孩子的脑海中是空白的，不一定能够直接就接受，也绝对不可能在没有任何现实可见、可触摸的情况下就直接理解。必须让孩子经历具体的操作过程，然后自己去体悟，这才是帮助孩子成长的正确方法。

有一个小朋友在路上看到一只蚕茧，就把它带回家，想观察蚕蛾

破茧而出的过程。等了几天，他终于发现蚕茧在晃动，于是每天观察的时间更长了。他仔细观察起蚕蛾用身躯艰难冲破蚕茧的过程。开始的时候，蚕蛾在壳里一点一点地蠕动，渐渐地，可以看到蚕茧壳一个角出现了一个洞。然后停了好长时间，蚕蛾又开始努力了，小洞渐渐扩大，能够看到里面是成形的蚕蛾。过了一会儿又有了新的动作，蚕蛾试图从小洞中钻出来，但实在钻不出来，只能又继续开始摩擦这个洞口的边缘。小朋友取来放大镜，仔细看，洞口的边缘先变得有些潮湿，然后洞口就一点一点地扩大，扩大了一点后，蚕蛾又尝试钻出来

，还是没有成功，它又继续摩擦洞口边缘.....这样来回至少有15次，孩子明白了蚕蛾的目的，于是拿出小剪子，从洞口的边缘剪开这个蚕茧。蚕蛾脱离了蚕茧的束缚，终于自由了。它尝试扇动翅膀，想飞起来，可试了几次都没有成功，翅膀上还有没完全展开的皱褶。蚕蛾一直在尝试、尝试，但一个小时后就不再尝试了。过了4个多小时，蚕蛾还在原处，用手触摸时，它已经没有动静了。

我们的老师、父母都是好心人，看着孩子不理解这么简单的概念会十分着急，于是干脆就帮助他跳过去——
聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

——你记住就行了！照着模仿还不会吗？以后都这么做就可以了！其实就是这个意思，懂了吗……这些话都是老师、家长们常说的吧？这些话就好比泯灭了蚕蛾自己奋力的过程，没有了奋力的过程，也就没有机会长出足够坚强的翅膀，就算挣脱了、自由了，也仍旧没有足够坚强的翅膀去飞翔。

妈妈们，让我们回到前面，从生活中寻找具体的事情来解释这些词汇吧：

乘积 扩展 增加 减少 相差 相同 最

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

小的 最大的

最多的 最少的 一样 一半 两倍 同向
相向 相遇

- 乘积：我家住在四楼，
每上一层要走两段楼梯，
一段的台阶数是7，
那么一层楼的台阶数是多少？住在四楼，所有台阶数的乘积是多少？
- 扩展：用尺子来测量一下，学校发的自然课的课本的长宽高比语文课本的分别扩展了多少？

- 增加：上个星期，你的作文写了156个字。这个星期的作文增加了22个字，写了多少字啊？
- 减少：昨天早晨你喝了两杯水，今天减少了一杯，喝了几杯？
- 相差：去年你的个子高1.23米，今年高1.32米，相差多少？

最小、最大、最高、最多、最少、最短、最长，所有的“最”都是多个比较后的结果，让孩子理解就要提供

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

尽量多于三个的同类东西来比较长短、大小、轻重，孩子才能够渐渐理解“最”的含义。一样、一倍、两倍、一半、相同，这些都是比较的结果。让孩子对事物进行比较，并理解生活中这些常用的数学术语。

多数孩子从小学三年级起就会在数学课本中发现许多不太能够理解的词汇，而语文教学中又没有专门对这类词汇进行说明，也没有提供足够多学生见过、听过、遇到过的来自实际生活的例子。一旦遇到了不懂的地方，便经常会归罪于数学学不好的常见

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

原因上。其实本质都是对词汇的理解没有过关。在日常生活中，爸爸妈妈可以借助很多常见的事物来建立抽象概念，这对孩子数学能力培养的效果要比参加奥数班强得多。

父母们可能会觉得，社会上有各种各样的辅导班，能够把孩子送去，就算对得起自己的良心了，就为孩子的智力成长尽到责任了。外包是社会分工的一种表现形式，对孩子教育的外包不仅可以是学校，也可以是辅导机构，但其实最关键、最贴近孩子、最直接有效果的还是父母本身。孩子聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

的第一任老师就是父母，父母也最能够把握一切日常生活的机会来建立许多概念，扩展脑力智慧。

数学不仅是由数字构成的，也包括词汇。父母应该设法将孩子可以见到的各种现象变成词汇，尤其是数学中会出现的词汇，培养孩子对这些词汇的熟悉、理解，并渐渐形成认知。这样，当孩子再遇到应用题时，题意理解这一关就可以轻松跨过了。

这里再给妈妈们列出一些小学数学经常会碰到的12个词汇，希望你们

能够借助生活中的机会来启发孩子去认识、熟悉这些词汇，并理解其本质的概念。可通过多举例、多比喻来实现。

顺序 任意 和 往返 轮流 连续

剩余 多出 同比 匀速 注满 单独

数学能力的基石正是掌握词汇。

具象与抽象，这是人与人在面对相同事物时，能够形成不同理解的核心挑战。18岁以下的孩子，都不擅长抽象能力。任何文字都是对事物的抽象过程。桌子，是先看到具象的样子，才学会抽象的这两个字。乘积呢？非常抽象的词汇，没有让孩子充分看到一个样子，是不能理解具体意思的。

小学数学中有大量的类似题目，实际上考的都不是数学，而是对词汇的理解。这个回合给了一些例子，可惜例子还不够多，且看下一本《爸爸聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

教的数学》中，有更多的具象到抽象的例子。

那么，孩子什么时候才具备运用抽象词汇来学习的能力呢？

A：要到触觉学习的阶段。

B：要到视觉学习的阶段。

C：要到听觉学习的阶段。

D：要到大学阶段。

(参考答案见全书末尾)



从手指开窍出大脑智慧

◎人类有记载的数学活动基本上来自于计算、数数、清点，而早期最方便的工具无疑就是手。当然，玛雅人还用过脚趾头呢。

◎对孩子来说，指尖上的数学并不是登堂入室的学术任务，而是启迪心智、启发思维、启动乐趣的探索过程。

1995 年 10 月 26 日

星期六

晴

今天教小学奥数班的孩子熟悉规律。孩子们说在学校开始学习乘法口诀了，但总是记不住结果。他们觉得最不好记的是乘以 9 的口诀，于是我给他们讲了我妈妈教我的指尖算法。孩子们非常感兴趣，不到 10 分钟就都掌握了，这时，有一个孩子问：“老师，乘以 8 可以这样做吗？”我被问懵了，因为乘以 9 的方法是小时候妈妈教的，而乘以 8 的方法我自己摸索出来过，但早已没有印象。于是我坦诚地告诉这个学生，我也不知道可不可以，不过大家应该自己去尝试。晚饭后，我自己回忆了半天，一点思路都没有，指尖上应该如何操作乘以 8 的运算呢！

1995 年 11 月 16 日

星期六

阴

这个叫魏楠的孩子让我惊讶，他真把乘以 8 的指尖算法摆弄出来了。仍然是两只手、十个指头，乘以 8 的那个数如果是 4，这个指头摺下去后，跟着再摺四个指头，左手剩三个指头，右手剩两个指头，真的就是 32。我让他讲给同班其他同学，大家尝试了所有乘以 8 的数字，都是正确的。接着我发动所有学生，一起把乘以 7 的指尖算法做出来，不到 15 分钟，朱晓庆同学就做出来了，后来乘以 6、乘以 5 也都完成了。

希望你还记得在第二回中指尖上的那些数学动作，我们一起回顾一下

聚辛堂 juxintang.cn 每日电子书

- 一位数乘法中，任何乘以9的算法都可以通过两只手表示出结果。
- 在一只手上数数，可以来回一直数下去。

利用手指对孩子的好处有：

- 手指活动对大脑细胞发育、活跃会起到促进作用。
- 手指活动能够激发孩子

学习的兴趣。

- 手指活动能够降低孩子学习新知识时的恐惧感。

你在本回开篇看到的日记，正是来自29年前我在北京师范大学附属实验中学教书时辅导小学奥数班的经历。当时，利用手指头的学习就已经得到了拓展（图6-1）。

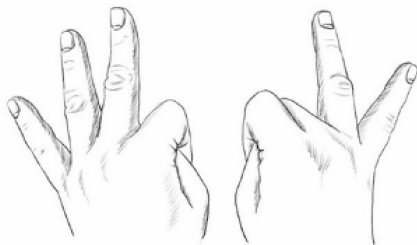


先伸出双手，展开十指。

图6-1（未完）



数到第 4 个指头，弯下去。

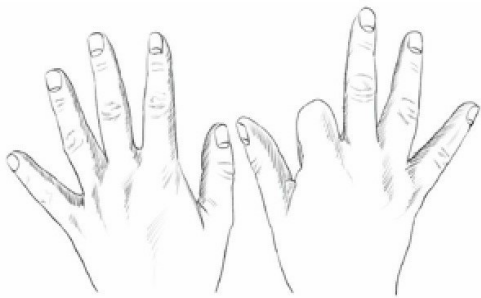


在第 4 个指头的右边再弯下去 4 个指头。

图6-1（续）

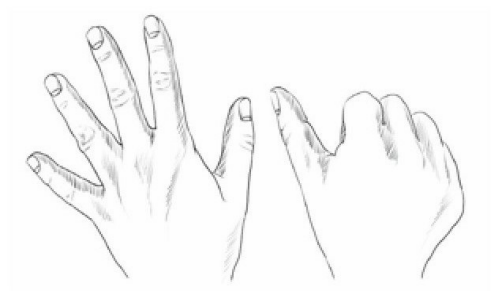
这就是4乘以8，弯下去的指头左边是3，右边是2，所以就是32。

乘以8与乘以9不同的地方有两个：第一是弯下一个指头还是弯下几个指头；第二是当弯下的指头不够时，从左手的指头中减去这个数。



从左边数到7，指头弯下去。

图6-2



在 7 的指头右边再弯下去 7 个指头。

图6-3

如图6-2所示，操作一下7乘以8，数到第7个指头。接着在第7个指头的右侧继续弯下去7个指头，现在已经弯下去了3个，这样还应该弯下去4个（图6-3）。第7个指头左边有6个

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

指头，就是60，减去还应该弯下去的4个，就是 $60-4=56$ 。

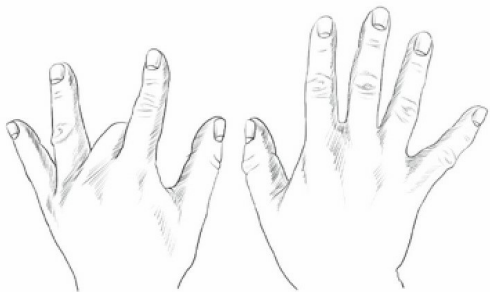
别看说出来一下就明白了，但在没有想到之前，自己要突破头脑中多少封闭的门啊！这才是创造性的火花闪耀，才是兴趣激发的瞬间，才是灵感降临后的喜悦，才是一种最深厚的激励，让孩子产生自信，并驱动他的思想走得更远。这个突破胜过加了100次油的汽车，让孩子可以在探索的路上走得很远。

我曾走过12个国家，每到一个国

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

家都要去当地的图书馆查阅一些数学著作，包括英国伦敦的英国图书馆、美国纽约州立图书馆。我阅览过的数学方面的英文版图书超过了200本，但都没有找到关于乘以8的算法的记载。这次本书中详细讲解的指尖算法，应该属于罕见的内容了。美国纽约州立图书馆的一本数学书中提供了另外一种指尖算法，但我们需要先回顾一下乘以9的手法：以3乘以9为例，弯下去的指头左边剩余两个指头，右边剩余7个指头（图6-4），乘法的结果就是27。也就是说，左边的指头数

应该乘以10，右边的指头数当作个位就可以了，即 $2 \times 10 + 7 = 27$ 。



从左边数到3，弯下去。

图6-4

其中，我们把左边指头乘的这个10当作基础标杆。这个标杆来自于10个手指头，计算的目标是乘以9。如

果是乘以8的话，应该用9个指头，基础标杆就应该是9。让我们来尝试一下：4乘以8起始是9个指头，从左到右数到4，把这个指头弯下去，左边剩余3，右边剩余5；左边的3乘以基础标杆9，就是27，用这个27加上右边剩余的5，就是32。

这个手法在计算的时候有一个前提条件，那就是乘以9已经掌握得非常熟练了，这样左边剩余的手指数乘以9的时候，就会立刻在脑海中出现一个数字，然后加上右边剩余的手指数，得出答案。

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

人类有记载的数学活动基本上来自于计算、数数、清点，而早期最方便的工具无疑就是手。当然，玛雅人还用过脚趾头呢。印度人还有另一个计算6~10之间任意两个数字相乘的指尖算法。这也不是原创，而是来自于我阅读的一本英文版的数学科普读物。我也在这里将其介绍给各位读者和妈妈们，用于调动孩子参与的积极性，激发他们的兴趣。

请看图6-5所示6乘以8的情况：
左手的6对应右手的8，对应的6、8两个手指下方有4个指头（包含6、8两
聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

手指在内)，就是 $4 \times 10 = 40$ ，上面左边4个、右边2个， $4 \times 2 = 8$ ，所以 $40 + 8 = 48$ 。

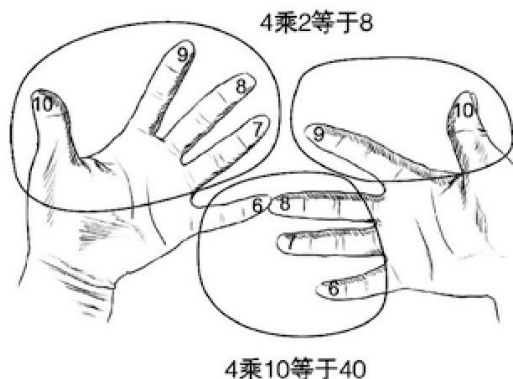


图6-5

再看一下7乘以9的情况（图6-6

)。左手的7对应右手的9，对应的7、9下面有6个指头，就是60。上面左边是3，右边是1，相乘就是3，然后 $60+3=63$ 。

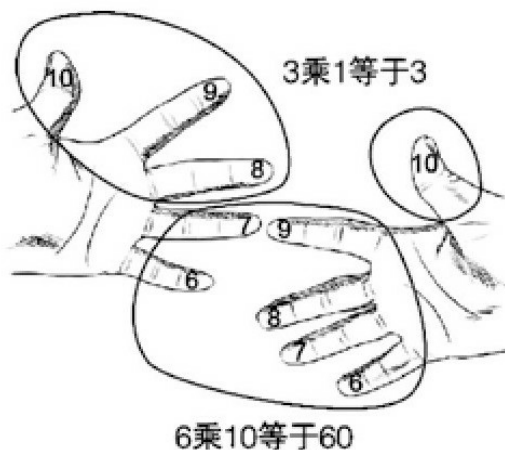


图6-6

孩子从5岁起就已经具备用手指头计算的意识了，同样，在学习加法的过程中，也非常熟悉手指头这个工具，可以通过清点手指来找到加法的答案，当然，也可以找到减法的答案。我们在第二回中已经介绍了通过手指头数数的办法，不知读者朋友们是否在自己孩子身上应用过。如果试过，你可能会观察到如下反应：

- 孩子有兴趣轮流去数。4岁左右的孩子应该可以数到50。
- 此时如果提问40落在哪

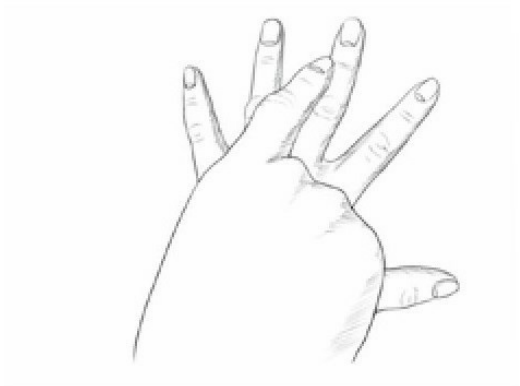
个手指上，孩子的表现应该是重新数数，并找到数到40时的那个指头。

- 跳数1、3、5时，应该知道都落在小拇指、中指、大拇指上，跳数2、4、6时，明白了都落在无名指和食指上。接着问199落在哪个指头上时，孩子大概能够猜出只能是三个手指中的一个。

- 增加难度后，孩子可能会懈怠，需要妈妈想办法激发孩子，比如妈妈可以说，我不用数就知道40落在无名指上。这样孩子可能会验证一下，然后就觉得妈妈一定有神秘武器。你还可以进一步显示规律的威力，比如可以说：我也不用数，就知道90落在无名指上，100落在食指上。能运用规律，才是

指尖上的数学在激发孩子兴趣后要实现的真正目的。那么，规律究竟是怎么来的呢？

现在，妈妈可以陪孩子把指尖数数的游戏玩出新花样（图6-7）：



数到这个中指应该是几。

图6-7

- 增加一个手指头，重复往返数数的步骤，重新考察1、3、5、7等落在哪里。

- 重新考察2、4、6、8会落在哪里。
- 重新考察189会落在哪里。

启发孩子寻找规律，从而激发孩子去验证，进一步产生好奇心，然后去探索，渐渐揭示出规律来，并在下一次的活动中运用这个规律。

对孩子来说，指尖上的数学并不是登堂入室的学术任务，而是启迪心智、启发思维、启动乐趣的探索过程。对12岁以前的孩子来说，还不足以

掌握复杂、高深的理论及公式，但他们的智力完全可以进行多种形式的变换。调动孩子参与这些不同形式的计算、数数和清点，都是这个年龄大脑发育阶段最合适、最贴切的活动。

德国著名数学家卡尔·弗里德里希·高斯生于1777年，拥有“数学王子”的美誉，与牛顿、阿基米德一同被誉为有史以来最伟大的三位数学家。在成长过程中，高斯主要得益于自己的母亲及舅舅——两个人都极其富有智慧。可以说，在数学史上，很少有人能像高斯一样，幸运地拥有一位鼎聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

力支持自己成才的母亲。高斯从小就对一切现象和事物充满好奇，在探索的过程中总免不了会超出一个孩子能被允许的活动范围。每当丈夫因此而训斥孩子时，高斯的母亲总是支持高斯，她十分珍视高斯的才华。



高斯 (C.F.Gauss, 1777年4月30日
—1855年2月23日)

高斯9岁那年在学校上课时的表现成了后人世代传诵的佳话。当时老师觉得教室里太闹，索性出了一道题，试图让孩子们静下来，自己好消停片刻。题目是这样的：从1加到100，结果是多少？教室里确实安静下来了，但不到两分钟，高斯就脱口而出：“5 050！”老师心想，答得那这么快，肯定不对，于是顺口就说：“重算。”高斯答：“从1加到100，用1加上100，再用2加上99，都是101，一共有50对101，就是5 050。”老师愣住了，接着高斯又说：“也可以这样，加两

列1到100，其中一列从100排到1，这样就是100对101，也就是10 100，这个数的一半就是5 050。”他用了两种形式，灵活、多变、快速地算出了1到100的和。

这个故事是我妈妈讲给我的，听了以后，我自己在纸上用高斯的方法计算了一次，验证了他的计算是正确的，然后才开始在脑海中品味算法的灵活性。这个算法并不是要让孩子掌握数列、数列之和，或者是死记硬背的算法公式，而是启发孩子扩展思考的边界，不一定遵循1先加2，再加3

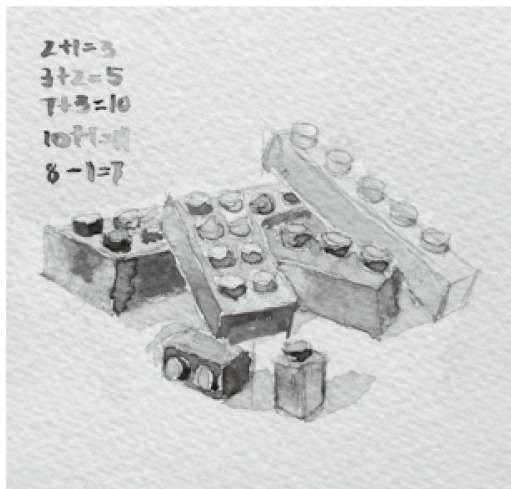
聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

，然后是4、5、6这样的次序，完全可以跳跃，可以重新组合，甚至可以增加一列数来补充，记着算完后减去一半就可以了。

训练灵活性是在12岁之前最需要的脑力活动。手指头在生理上会刺激大脑的部分区域，而它本身也确实是一种工具，可以用来计数，是灵活性训练的一种途径。衡量1岁孩子智力发育状况的标准之一，就是看孩子的大拇指与食指能否捏合拿起细小的物品，如果可以，大脑细胞发育的边界就在扩张。同样，对4~6岁的孩子来

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

说，手指头的活动，如清点、计数都能够激发灵活性，而不要教条、僵硬地按照老师说的一切去模仿。这才是《妈妈教的数学》的意义。老师没有时间进行这样的教育，妈妈有！老师没有足够的爱心和耐心去启发孩子，妈妈有！老师可能没有学过数学教育中的心理变化，妈妈看了这本书就学会了。老师也许缺乏方法，这本书就向妈妈们揭示了这些方法。



灵活多变、形式活泼、有动作、有行为、能参与，这些过程会在孩子的心里渐渐扎根，并萌发好奇、新奇、探求的动力。从小我的记忆力不好

，但对乘、除以2还是非常熟悉的，于是我妈妈教给了我另一个窍门儿，至今就算在国内的奥数教材中都没有，我只在小学奥数班上讲过，请看图6-8。

$$17 \times 234 =$$

	左边	右边	
除以2	17	234	乘以2
除以2	8	468	乘以2
除以2	4	936	乘以2
除以2	2	1872	乘以2
除以2	1	3744	乘以2

图6-8



眼前的题目是 $17 \times 234 = ?$ 写上左边、右边，中间画一条线，然后把17

写在左边，234写在右边。然后开始第一行，左边用除法，当然是除以2，不用考虑17除以2的时候的余数，直接写8就可以；右边用乘法，当然是乘以2。然后第二行，左边继续相除，右边继续相乘。直到有图中的样子，然后用线把左边是偶数的行划掉（图6-9）。

$$17 \times 234 = 3978$$

	左边	右边	
除以2	17	234	乘以2
除以2	8	468	乘以2
除以2	4	936	相加
除以2	2	1872	乘以2
除以2	1	3744	乘以2
			3744
			3978

图6-9

然后看右边剩下了两个数，一个是234，一个是3 744，两个相加就是答案了。这种算法的好处是仅仅用乘除2，而不涉及任何其他数的乘法和除法，而且其中有更多的参与活动，与目前学校中教育的方法完全不同。

对于乘法，可以提供给孩子竖式算法、格子算法，还可以提供这个叫“二号算法”的方式。无论是两位对两位，还是三位对三位，都可以。

我在纽约州立图书馆中一部叫《法老时代的数学》的书里查到了这个方法，是古代埃及人在4 000多年前记载的。那个时候没有九九乘法表，也没有发明出什么乘以3、乘以7，仅仅依靠对2的运算就完成了所有数量之间的相乘，绝对智慧。

指尖上的数学有足够的空间引导

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

孩子参与，并培养快乐的体验。所有的快乐来自于不同的计算方法，却都能够得到相同的结果，这是神奇，是奥妙，是无穷的宝藏。妈妈给孩子指出通往宝藏的方向，孩子积极主动地去探索，一生也就充满了实践、探索、满足和快乐的活动。

这一回中妈妈可以做的事情有很多，我就不单独提供额外的建议了。用好自己的手，审视手掌、手指，这是苹果公司创始人乔布斯的习惯。通过长时间的审视，让他下决心要替代鼠标，直接用手来解决问题——你一

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

定体验到了苹果那灵动的触摸屏！

开窍就是人们对一个事物有一个恍然大悟的感觉。“哦，我明白了。”这时才是真正的明白。现在很多孩子其实都没有体会过这个感觉，都是被动地被灌输了大量已知的内容，并变成一种习惯。如同人工养殖的鸭子，不用自己找食物，被人拎起脖子，用管子塞到嘴里，打开开关，灌5秒，结束。

开启智力的窍，需要孩子自己较长时间的参与、琢磨和思索，如同徘徊在门前，突然想到一个方法，结果真的就打开门了。这个回合增加了更

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

多指尖的玩法，本意就是增加更多的活动，试图让孩子从活动中去悟、去体验，并感受到一种规律性的内核。

而大多数读者，
阅读这个回合的内容
，都将注意力放在了
如下四个方面，其中
，哪个方面最多：

（关注度更高的选项排列在前面）

A：这么频繁地使用
手指，好吗？

B：那个数数儿到底落
在哪个指头上啊？

C：这些手指的法子背后原理是什么啊？

D：这些玩法都是从哪里来的？

（参考答案见全书末尾）



发烧是多少度

◎我妈妈做的事情其实很简单，就是在“37度”这个事物上联想开去，进行有关联的解释，这样孩子的脑海中就能够不断地想这件事。

◎儿童心理学在谈到记忆力的时候有这样的解释：对一个事物的记忆来自于头脑中对这个事物的集中时间，集中的时间越长，对这个事物记忆的时间也就越长。

1973年3月7日

星期三

阴天

今天我10岁了！妈妈蒸了一个馒头给我，这个馒头上有字： $3+7=10$ 。今天就是3月7日，3和7加起来就是我今天的岁数，真有趣。我舍不得吃这个馒头，最后爸爸让我快点儿吃，我才吃完了。

1973年12月31日

星期一

晴，冷

明天是新年，我就11岁了，妈妈让我用0、1、2、3、4、5、6、7、8、9这10个数字进行加减乘除，列出一个等式来告别1973年。结果是这样的： $123+50\times16\times7-4+8-9=1973$ ，而迎接1974的等式是： $987\times16-5+4-3+21\times0=1974$ 。妈妈让我记得以后每年都做一个。

今天回顾这篇日记，我真恨自己，为什么就记得这么短呢！多写一点

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

多好啊！能够想象得出来，当时我妈妈应该还讲了很多很多，只可惜我的日记中全都没有记载。10周岁生日应该算是比较重要的日子，我却没有详细地记录。不过，在我记忆深处有关3、7、37的记忆的确都是来自10周岁生日这一天。

$$777 \div (7+7+7) = 37$$

这个神奇的等式就是那天留在我脑海里的。这还不算，不信你再看这个：

$$999 \div (9+9+9) = 37, 888 \div (8+8+8) = 37$$

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

$$, 666 \div (6+6+6) = 37$$

后来，我自己得出了更多的结论，好像37能表现出来这种特点的根本原因是 $37 \times 3 = 111$ 。所以，以上的999、888、777.....不过都是111的倍数，而其实111本身也可以这样写：

$$111 \div (1+1+1) = 37$$

把1都换成7当然也对，都换成9或者换成4也一样。这样，那个神奇的等式就变成了如此简单的等式，我也体会到数学表面不同而背后一定有更加美好的根源。

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

当我乐此不疲地把有关我生日的数字颠来倒去地计算时，我并不知道实际上自己正沉浸在古代数学家的研究成果中，也不知道自己其实在重复着历代数学家、哲学家们已经反复咀嚼过许久的内容。“数学”这个词很有意思，拆解开来先是“数”，然后是“学”。“数”这个字的含义就更加广泛了，可以是数量、数字，也可以是动作——清点什么东西的动作也是数。数数可以是数牛、羊，也可以是数自己的手指头。“学”的意思比较容易理解，那就是重复、模仿，深入一点就

是对更多的事物进行分类，然后比较之间的区别，这就是研究了。“学”的对象可以是数、量，可以是字，可以是数与数的关系，也可以是“数”这个行为的过程。

中文中还有更多说法，比如，“算术”的意思就是算的技术。“算”就是对数字之间进行加工的过程，只要涉及过程，那就是技术。还有“计算”这个词，意思就是计量，把不同的量进行标示，并保存下来。算还是加工过程，把加工过程保存下来就是计算了。

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

数学、算术在英文中对应的词汇分别是mathematics、arithmetics，意思就是针对量进行清点。数学这门科学起源于清点、计数、比较和加工。如果孩子能够充满兴趣地投入，去摆弄数字，用刚学到的加法、减法、乘法、除法来进行反反复复的操作、参与、体验，用自己的行为来体验历代数学家、哲学家们做过的事情，这不就是科学精神吗？

我的妈妈给我打开了一扇门，没有多么严肃地事先声明，而是做了这么一件简单的事情——从我的生日这聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

个数字开始，让我站在了一条路的起点，而走下去这个动作竟然是我自觉自发（或者说是不知不觉）的行为。如今年过半百的我才深刻理解了，妈妈给我的不是学校老师教的那些知识，而是追求知识的动力，是追求知识的乐趣，是追求知识的兴奋。

遗憾的是，在我以后每年的新年日记中都再也没有找到类似的记录。这些等式都不是教科书中的，也从来没有在学校教育中被要求过，它们都留存于生活的瞬间之中，也许在脑海中停留过一段短暂的时间，但都随着聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

岁月的流逝而流失了。而能够留在脑海中无法泯灭的是那探索数字之间运算的过程，这个过程让我熟悉了运算，了解了颠来倒去对结果的影响——加法前后次序没有影响，乘法也不受次序的影响，减法和除法会因前后数字的不同而变化。

通过1973年、1974年这两年的日记，我看到更多的就是妈妈用各种不同的形式、事件、活动，来激发我探索、尝试、实践，并让我在所有这些活动中建立了自信，使我不再怕数字，不再怕运算符号，不再怕长长的等

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

式；也让我对数字更加熟悉、亲切，在脑海中扩展了足够的空间来记住阶段性的运算结果。

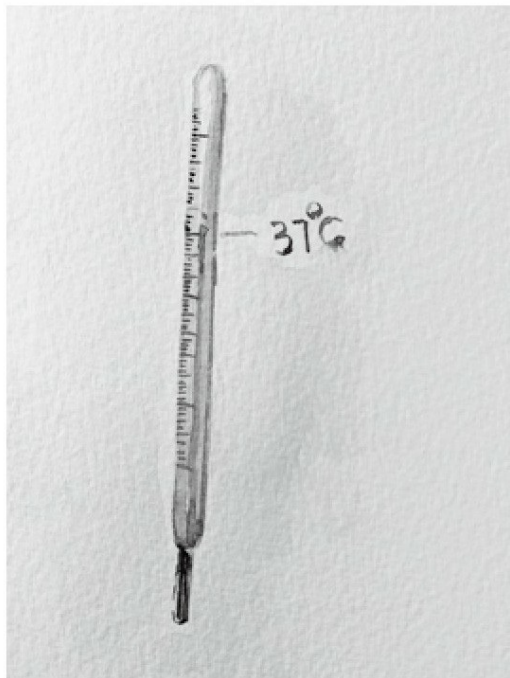
1972年2月28日

星期一

今天我发烧了，没有上学，医院的阿姨给我量体温，说是39度。妈妈让我坚强，所以打针才没有哭出来，其实我很疼很疼的。回家的路上妈妈说，如果是37度，就不用打针了，还说37度就是我出生的日子。我的生日是3月7日，我一定要回到37度，就不用打针了。

直到上了中学，我还一直以为每个人的体温应该是不同的——生日不同体温当然应该不同。看到这段日记我才知道，自己的这种认识原来是出自这里。我好奇的是妈妈为什么讲37

度的时候要说就是我的生日呢。我想她的目的应该就是要让我记住这个数字吧，37度是体温，用我出生的日子来记住，这也是一种提高我记忆力的方法。



儿童心理学在谈到记忆力的时候

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

有这样的解释：对一个事物的记忆来自于头脑中对这个事物的集中时间，集中的时间越长，对这个事物记忆的时间也就越长。

那么我妈妈做的事情其实很简单，就是在“37度”这个事物上联想开去，进行有关联的解释，这样孩子的脑海中就能够不断地想这个事情，在这个事物上用的思考时间延长，延长的结果就是对这个事物的记忆加深。

1973年3月19日

星期一

晴

今天放学回来妈妈不在家，我和楼下的小朋友学下五子棋，输了好几盘，最后一盘我快赢的时候，妈妈回来了叫我回家。妈妈问我那个棋盘上的格子是什么样子的，幸亏我记了一下，是正方形的，每边都是19个；棋子是下在点上的，有361个点。

今天回顾这些日记片段，我才知道自己对围棋棋盘的熟悉源自我10岁的时候。如果不是妈妈每次都问我这、问我那，我可能真不会主动去关注那些细节。只有熟悉了细节，对全局的情况才更有把握。

1974年3月7日

星期四

阴

今天妈妈让我用分数算 $1 \div 3$ ，还有 $1 \div 7$ ，我算的结果是三分之一等于 $0.33333\cdots$ 一直下去，三分之二就是 $0.66666\cdots$ 一直下去。最好玩的是七分之一，算出来是 0.142857 ，然后这6个数就开始重复了，七分之二算出来还是这6个数，就是前后位置变了，是 0.285714 ，我猜了一下七分之三，然后一算，真的就是 0.428571 ，后面的没算。

从七分之一一直到七分之六的结果，我到现在都可以不假思索地说出来，根源一定就在于我11岁生日那一天。数字是数学的基本材料，玩弄数字到了极致，就形成了数论，数论是数学科学的基石。读者朋友们，培养起孩子玩数字的兴趣吧，让他们看到

不同过程中的变化、不变，以及奇怪的对称、巧合，这些都是激发孩子脑海中火花的灵感之源。

为了强化我的记忆，妈妈列举了不少可以让还不到10岁的我十分惊讶的东西，比如：

$$1 \times 9 = 9$$

$$2 \times 9 = 18$$

$$3 \times 9 = 27$$

$$4 \times 9 = 36$$

$$5 \times 9 = 45$$

$$6 \times 9 =$$

$$7 \times 9 =$$

$$8 \times 9 =$$

$$9 \times 9 =$$

妈妈提醒我看结果的第一列数字，是1、2、3、4，而最后一列的数字是9、8、7、6……我就开始猜了，那么接着就是54、63、72、81，妈妈肯定地点头。接着她进一步提示我，看看还有什么规律，当时的我其实是没有明白“规律”这个词是什么意思，又不知道其实自己是不懂“规律”这个词

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

，所以肯定就无从做起。妈妈提示了我一下：“你看18这个数，1加8等于多少啊？”不用思考，“9啊。”我回答。“那么2加7呢，就是第三行。”“9。”接着不用她说了，我快速扫了一眼就知道了，都是9。

随后我自己做了10乘以9、11乘以9，等等，直到100以内所有数去乘以9，然后把所得结果的所有数字相加，加到最后都是9。接着妈妈提示我：“如果你看到这个数，837，是不是9的倍数呢？”我快速加了一下，数字相加是18，再加就是9，所以我说

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

应该是。妈妈让我自己算一下，果然，算出来就是 93×9 。不用我妈妈再说，以后看到一个数字，快速一加，最后是9，这个数肯定能够被9整除。其实，这就是数学中的猜想，对孩子来说，证实猜想的方法就是实验，没有例外。而对真正的数学来说，必须证明，这就要求具备初中代数的知识才能够完成了。

孩子可以不理解“规律”这个词，却能充分理解“窍门儿”这个词。对童年的我来说，知道一个数是不是能够被9整除，就觉得这是窍门儿了，掌

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

握了窍门儿，就可以经常露一手了。等别的同学表示惊讶、感慨的时候，自己心里的得意和自豪就油然而生了。接着，等一些同学也知道了这些窍门儿之后，我已经努力去想新的窍门儿了。于是任何数乘以3的结果的窍门儿也让我找到了，乘以5、乘以11我也都渐渐发现了。

在北京师范大学学习儿童心理学时，我学习到“**mathematics**”这个词。在拉丁语系中，这个词就是计数、猜想的意思。妈妈让我参与的活动其实就包括了四个阶段，这四个阶段涵盖聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

了人类思考方式的次序：大量的实践，实践中观察，观察后猜测，猜测后验证。牛顿的万有引力理论就来源于对身边诸多现象的观察，尤其是对前人伽利略留下的大量数据的观察。在此基础上，牛顿形成了一些猜测，然后对自己的猜测进行检验，并试图用严谨的方式来论证，从而形成了体系化的理论。

但这些理论对孩子来说都太伟大，也太遥远了。对孩子而言，最直接的、最贴近的例子就是自己观察那些乘以9的数的结果，然后尝试去猜测

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

，去验证，进一步推广尝试，并形成自己脑海中的结论。从记忆、理解、运用这三个方面来看，这样比从学校老师那里学习的效果要好得多，记忆的时间更长，理解得更加透彻，运用得更加熟练。多数孩子都是在学校里由老师教授这些被9整除的规律，这是被迫、被动的，没有植根在脑细胞中，随着一夜的睡眠，也就烟消云散了。

我对数字的兴趣越来越大，妈妈给我玩的数字也越来越大，她总是给我出各种挑战，比如7834968这个数

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

是不是能被9整除。我就在心里把每个数加起来： $7+8+3+4+9+6+8=45$ 。然后 $4+5=9$ ，这个数肯定能够被9整除。于是我养成了一个习惯，只要看到数，就把每个数字都加一遍，比如，看到19路公共汽车，就会想：累加的结果就是1。看到37路，我感觉特别亲切，累加的结果也是1。直到有一天.....

1973年3月31日

星期六

晴

妈妈终于告诉了我这个秘密，她可以快速发现我做的乘法是对的还是错的。今天的作业有一道题是： $47 \times 83 = 3891$ 。妈妈看了一眼，就说错了，让我检查，检查的结果真的错了。我写了一个数 3901 。妈妈看了一眼说，对了。妈妈实在是太快了！她根本就没有做乘法，而是这样做的：首先，她把 47 这个数分解成了 $2(4 + 7 = 11, 1 + 1 = 2)$ ，然后，把 83 这个数也分解成了 $2(8 + 3 = 11, 1 + 1 = 2)$ ，接着 2×2 就是 4 ，最后她把 3891 这个数同样分解了一遍，就是 $3(3 + 8 + 9 + 1 = 21, 2 + 1 = 3)$ ， 4 与 3 不一样，所以结果错了。而对后来我做的那个结果 3901 ，我也分解了一次，真的是： $4(3 + 9 + 0 + 1 = 13, 1 + 3 = 4)$ 。以后我才知道怎么样快速地自我检查了。以前妈妈检查我的作业总能那么快，这个窍门儿我可得记着了。

看了这一天的日记，我想起现在检查儿子作业的时候就经常使用这个方法，不过我不知道这个方法是怎么来的，我在北京师范大学数学系上学聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

的时候也没有学过这个方法。但是这个方法真的很巧妙，首先是速度快，其次是变换了一个方法来验证自己做题的结果。作为妈妈的你，如果真的曾经检查过孩子的作业，就会知道检查一遍这种两位数的乘法多费时间，除非用计算器。可是孩子看你用计算器，心里多不平衡啊，肯定会想，就知道逼我做题，你自己还用计算器。不用计算器吧，自己口算又不熟，想到这儿，我心里对妈妈的敬仰之情就如江水、海水般泛滥。用上这个法子，简直太牛了。

其实，后来我把这个法子进一步省略了。比如3891，这里面能够凑成9的有8和1，还有一个9，直接就划掉，其实数和就是3。而3901这个数中呢，有一个9直接划掉，剩下3、0、1，加起来就是4，这样更快，连中间多弄一次21、13的步骤都不用。下面我会多举几个例子，让读者朋友们充分理解一下。

$23 \times 39 = 897$ ，快速
扫一眼，看对不对。

你的脑海中应该是这样的次序：
23的数和是5，39的数和是3，5乘以3
是15，15的数和是6，897的数和也是
6，所以答案正确。只要数和不等，
结果肯定不对。

再尝试一个： **$278 \times$
 $845=233910$**

尝试自己按照步骤来做：278的
数和是多少？845的数和是多少？以

上两个数的乘积是多少？233910的数和是多少？第3步的数与第4步的数一样吗？自己动手算一下，然后用这个方法再验证一下。

有些妈妈看了这一段，给我写邮件，问我为什么。我在这里就不进行数学论证了，作为数学专业毕业的学生，论证这个很容易，可是讲给妈妈们却不容易，我也不打算在这里破坏我自己的写作意图。我的意图就是你掌握了就可以了，就能够让孩子觉得你神奇了；孩子自己也会努力掌握，觉得自己超级厉害，在同学中也比较

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

自信、得意、自豪。如果你真的执着地要知道背后的原因，那就给我写邮件吧。

关于小学时光，我记忆中的许多事情都与数字有关。比如，我是1963年出生的，如果加上我的生日数字37，那就是2000。我以前一直觉得我到2000年就会死掉，结果辛辛苦苦熬过来了，就觉得自己挺幸运的。我知道1963是一个素数，爱因斯坦生于1879年，也是一个素数。这就与我另外一天的日记有关了。

1974年3月14日

星期四

晴

妈妈说今天是爱因斯坦的生日，这一天也叫“ π 日”。他是德国犹太人，他的生日就是今天，可以写成314。妈妈还说爱因斯坦是十五点零九分出生的，所以可以接着写就是314159。妈妈说过两天还要问我爱因斯坦的生日。

我到今天半百的岁数，仍然能够脱口而出 π 的数值3.14159，根本原因应该就是因为这一天是爱因斯坦的生日。

妈妈借用生日引发了我对数字的好奇，引导我对数字进行各种方式的探索，让我熟悉数位，并练习心算各种个位数的加法，从而让我对9、3、
聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

5、11的倍数都非常熟悉。等到学校老师讲的时候，我已经了如指掌。老师让我来讲，我讲例子用的语言都是同学熟悉的，当然就会得到同学的掌声以及羡慕的目光。这促使我暗下决心，要跟妈妈学更多的窍门儿。感谢妈妈为我打开了这扇门。

在我三年级到六年级的这四年，我对数字、运算的各种窍门儿都已经融会贯通。有的老师说我这都是旁门左道，然而实际上，我是掌握并运用了正确的方法。读者朋友们，你也可以用孩子的生日来激发孩子的兴趣，
聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

或者用以下这些内容来获得孩子的惊叹：

(一)

$$1 \times 8 + 1 = 9$$

$$12 \times 8 + 2 = 98$$

$$123 \times 8 + 3 = 987$$

$$1234 \times 8 + 4 = 9876$$

$$12345 \times 8 + 5 = 98765$$

$$123456 \times 8 + 6 = 987654$$

$$1234567 \times 8 + 7 = 9876543$$

$$12345678 \times 8 + 8 = 98765432$$

$$123456789 \times 8 + 9 = 987654321$$

注意，不能直接打印好给孩子看。在孩子面前，让孩子看着，你拿一张白纸，然后开始写第一行。你不能抄书，也就是说你必须让孩子知道你是自己边想边写出来的。写三行后，看孩子是否能够跟着你写。

如果不能，你就直接写第五行，把第四行留空，然后看孩子能否填写进去。还不行，就写第七行，继续重复给孩子机会去写。如果无法完成，

把白纸留着，放在孩子接下来一周内都可以看到的地方。

(二)

$$0 \times 9 + 1 = 1$$

$$1 \times 9 + 2 = 11$$

$$12 \times 9 + 3 = 111$$

$$123 \times 9 + 4 = 1111$$

$$1234 \times 9 + 5 = 11111$$

$$12345 \times 9 + 6 = 111111$$

$$123456 \times 9 + 7 = 1111111$$

$$1234567 \times 9 + 8 = 11111111$$

$$12345678 \times 9 + 9 = 111111111$$

$$123456789 \times 9 + 10 = 1111111111$$

具体做法与第一题相同。主要目的就是启发孩子自己找到规律，并鼓励他们自己去计算一下，验证是否正确。

(三)

$$0 \times 9 + 8 = 8$$

$$9 \times 9 + 7 = 88$$

$$98 \times 9 + 6 = 888$$

$$987 \times 9 + 5 = 8888$$

$$9876 \times 9 + 4 = 88888$$

$$98765 \times 9 + 3 = 888888$$

$$987654 \times 9 + 2 = 8888888$$

$$9876543 \times 9 + 1 = 88888888$$

$$98765432 \times 9 + 0 = 888888888$$

具体做法与前两题相同。孩子是否有兴趣？是否觉得惊奇？是否在你做的过程中参与说出你将要写的数字

？是否能够自己创新出更多的形式？

(四)

$$1 \times 1 = 1$$

$$11 \times 11 = 121$$

$$111 \times 111 = 12321$$

$$1111 \times 1111 = 1234321$$

$$11111 \times 11111 = 123454321$$

$$111111 \times 111111 = 12345654321$$

$$1111111 \times 1111111 = 1234567654321$$

$$11111111 \times 11111111 = 123456787654321$$

$$111111111 \times 111111111 = 12345678987654321$$

具体做法与前三题相同。不要在一天内都给孩子做了，至少应该相隔一周。在一周内，还可以鼓励孩子重新在一张白纸上自己从头做起。

别忘了，孩子的生日是与他最有关系的数字，要找机会用上。当然，每年的年份也都可以尝试把0~9的数字都用上。通过各种计算方法，看能

否列出可以计算出年份的等式。

人们最喜欢的字是自己的名字，人们最喜欢的数字是自己的生日。自己的事情，人们有天然的喜好。而学习的东西，只要与自己有关联，也就容易有兴趣，能够推动自己用更多的时间和精力去关注。生日就是这么回事，而学到发烧，学到温度，学到数字表示的温度，也是这么回事。自己发烧了，才关心医生用的体温计，也才对上面的刻度感到好奇，继而渐渐懂得数字计量。

每个孩子都是不同的，相同的地方就是都有生日，都有机会发烧；而聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

妈妈的任务就是借助一切孩子自己体验过的事情来巧妙地、不露声色地加入那些有知识意义的元素，让孩子接受起来更为自然和顺利；从具象到抽象，顺理成章。

这个回合中能够
找到一个问题的答案
。这个问题是：作者
为何那么喜欢数字呢
？你认为哪个答案能
够最理想地回答这个
问题：

（较为重要的因素排列在前面）

A：天生的，就是喜欢数字。

B：被妈妈启发到自己的事情都用数字。

C：熟悉了数字就体会到绝招，就会更加喜欢数字。

D：学校老师教得好。

（参考答案见全书末尾）



孩子懂了吗？妈妈怎么知道

◎学数学，并不是能够模仿过程就等于学会了，重要的是真的从概念的层面理解词汇。

◎做题并不能验证孩子对数学概念的掌握情况。作为妈妈，能够用来检验孩子对数学概念掌握情况的唯一方式，就是观察或者询问。

1974 年 9 月 19 日

星期四

晴

今天是我弟弟的生日，妈妈让他先挑，是要小豆冰棍还是北冰洋汽水。他挑了冰棍，我挑了汽水。妈妈说如果我也吃冰棍的话，可以要 3 根，这次吃不了，下次出来也可以吃。

1975 年 1 月 21 日

星期二

阴

晚上吃饭我想吃包子，妈妈问我吃多少个，我要吃 5 个。吃饺子更好，能吃 30 个。妈妈让我想一想 5 个包子和 30 个饺子更想要哪个。我说都一样，反正不吃馒头。

1975 年 1 月 25 日

星期六

晴

今天算术考试，有一道题是：1 支铅笔、2 块橡皮、3 把转笔刀一共 265 元；2 支铅笔、3 块橡皮、4 把转笔刀一共 385 元；3 支铅笔、3 块橡皮、5 把转笔刀一共 48 元。问：1 支铅笔、1 块橡皮、1 把转笔刀各是多少元？这道题我没有做出来，妈妈让我多想想。

1975 年 1 月 26 日

星期天

晴

妈妈带我去商店买铅笔、橡皮还有转笔刀，昨天的题我做出来了，把三个东西都摆在一起，就做出来了。

看了我日记中这四天的内容，再来看现在各地课外数学补习班或者奥数班的内容，我才感到妈妈让我理解题目的过程是多么精心和巧妙。我的妈妈并没有学过心理学，也没有当过老师，她都没有念完初中就参军了。当我在自己50岁生日那天问她这四段日记内容的时候，她想了许久，说：“不太记得了，不过确实不知道怎么讲给你听啊。”然后我问妈妈知不知道“等量代换”。妈妈说，当然知道啊。我让妈妈给我解释这个词汇，妈妈说，就是“等量交换”的意思啊。我没

有继续难为她，妈妈已经在我小的时候，用行动给我解释了“等量代换”。



如果你是一个想为孩子学好数学而尽心尽力的妈妈，就一定思考过应该如何给孩子解释“等量代换”这个概

念。通过互联网，你会了解到以下内容。

等量代换的定义：用一种量（或一种量的一部分）来代替和它相等的另一种量（或另一种量的一部分）。“等量代换”是指一个量被与它相等的量去代替，它是数学中一种基本的思想方法，也是代数思想方法的基础。狭义的等量代换思想通过等式的性质来体现就是等式的传递性：如果 $a=b$ ， $b=c$ ，那么 $a=c$ 。真正使用到的等量代换为： $f(a=b)$ 就是 $f(a) \rightarrow f(b)$ ，其中 f 是函数公式。广义的等量代换举例来说就是：“如果李四是张三的同义词，张三是人，那么李四也是人。”这种数学思想方法不仅有着广泛的应用，而且是今后进一步学习数学的基础

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

，是一个非常重要的知识点，甚至到了大学都还会使用。

接着，你还可能会查到曹冲称象的故事，于是，你觉得应该给孩子讲讲这个故事。把故事讲完，孩子终于应该懂了吧？小朋友说不出来自己懂什么，也说不出自己不懂什么。孩子到底懂不懂，大人怎么能够知道呢？只有一个办法，那就是做题试试。

李老师买了**3**个足

球，张老师买了**4**个篮球，王老师买了**1**个足球、**1**个篮球、**3**个皮球。他们每人所用的钱数都相等。问：**5**个足球的价钱相当于几个皮球的价钱？

孩子头脑中仍旧是迷雾重重。这些迷雾中有：曹冲是谁？干吗要称象？称象行，干吗又称石头呢？石头与大象有什么关系啊？象重多少是什么意思？什么是等量？代换又是什么意思

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

思？接着足球与篮球之间有什么关系？皮球又是什么？都混在一起干什么呢？

做题并不能验证孩子对数学概念的掌握情况。作为妈妈，能够用来检验孩子对数学概念掌握情况的唯一方式，就是观察或者询问。以上这些问题其实反映的是孩子头脑中从具象到抽象的过程。当孩子不清楚一件事情的目的或者不理解目的的时候，就不太能够将注意力集中到这个目的的实施过程上。

目前中国小学教育中三年级就开始教等量代换了，如果你的孩子没懂，你就知道他在课堂上的表现是似懂非懂。孩子可能只是机械地解决题目表面的问题，如果你追问他一些具象的问题而他却回答不出来，那么说明他表面上能够操作符号，但没有理解其在现实生活中的意义。孩子在这样的灌输下长大，也就没有了联系实际的能力，没有了从具象过程中抽象出问题来的能力。通过许多名牌学府，中国向世界输出了不少人才，却很多都是操作型的人才，而缺乏独创型的

人才、提出问题的人才、开拓型的人才。这与目前中国小学教育所采用的方法不无关系。要知道，即使一些特级教师都没有思考过这个本质性的核心问题：如何教育孩子掌握概念？

在现实生活中，妈妈让我体会到了冰棍与汽水之间是可以交换的。要不选这个，要不选那个，这让我理解了交换的意思。接着用晚饭吃的包子和饺子来体现一种关系，就是吃两样都可以饱，不过包子是5个，饺子是30个。这都是来自生活中的案例，隐含的意思就是都能吃饱的情况——5

个包子与30个饺子是一回事儿。用钱来衡量的话，那就是3根冰棍与1瓶汽水的钱是一样的。

孩子在不理解等重的情况下，又如何理解足球、篮球、皮球之间的交换呢？在不知道铅笔、橡皮、转笔刀的情况下，又如何借助价钱的线索寻找不同物品之间的关联呢？

学数学，并不是能够模仿过程就等于学会了，重要的是真的从概念的层面理解词汇。读者朋友们，你们可以尝试一下问问孩子两类问题。第一

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

类问题是：你见过的猴子是什么样子的？或者可以稍微变化一下问这种问题：你见过的鸡翅是什么样子的？见过的菠菜是什么样子的？然后再问第二类问题：你见过的7是什么样子的？等量是什么样子的？

对第一类问题，孩子的回答中多数都包括颜色、状态的描述，有时还可能包括见过的地点、时间，以及当时在场的人。对第二类问题，麻烦就来了，孩子几乎无法回答，回答的语言中往往会陷入用7来解释7。这说明孩子对数字的理解停留在表象上，甚聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

至都没有透彻理解数字的真正意义。

关于这一点我对澳大利亚数学教学与中国数学教学进行过比较。澳大利亚小学3~5年级的孩子的数学做题速度、准确度都明显不如中国同年龄孩子的表现，但在概念理解上，中国孩子就明显薄弱了。澳大利亚9~11岁的孩子在解释7的时候，会说出类似这样的话：7是一周的天数啊，7就是你拥有的东西的一个数字记录，7就是一年级小学生的岁数，7就是电梯中的数字说明要去的楼层……

而中国的孩子，还有日本、韩国、印度、俄罗斯的孩子，我都曾经直接接触并调研过，他们的反馈十分相似，那就是用数字来解释数字，缺乏运用与现实的结合来理解数字。这样一来，中国的孩子不是输在了起跑的时间上，而是输在了起跑的姿势上。起跑的时间越来越早，起跑的姿势却越来越不正确。随着年龄的增长，这个不正确的姿势无论是对跑步的成绩还是身体形态都会造成越来越明显的影响。因此，重视起跑的时间不如重视起跑的姿势！

对数学概念的理解是孩子数学能力发展的一个重要基础。这个基础从3岁就开始形成了，然后每3年一个阶段，直到18岁。这是数学教育中抽象概念的理解发展规律，具体解释就是对词汇的理解。首先是对数字这个词汇的理解。与大象、牡丹花、猴子不同，数字在现实生活中没有具象的物体，只能从已有的量入手来建立数字概念。

这里涉及另外一个话题，那就是孩子对一个概念的理解是不是只有两个表现，要不就是理解了，要不就是聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

不理解。通过我自己从1985年到现在不间断地对各个年龄段的孩子的观察和测试，得出的结论是：认知过程在理解抽象事物上分为5个阶段。以对数字的理解为例。

- 浅层阶段：仅仅是一个字，与“大”、“天”这样的字是一样的。
- 初级阶段：一些物品的量，比如我有3个苹果。
- 中级阶段：一些事物的关系，比如8点总是在9

点的前面先到。

- 高级阶段：这些数量之间不仅可以比较，还可以操作。
- 深层阶段：数字是数量的符号，可以代表任何事物，任何事物都可以被数字量化。

对于3岁前就能够从1数到20的孩子来说，他们多数都停留在浅层阶段，理解的仅仅是字而已。这个时候需要父母带领孩子进行大量的清点物品的活动，比如，帮孩子清点有多少双

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

袜子、喝了多少水、吃了几个饺子，渐渐培养孩子抽象出数字中的量，在量的基础上开始建立中级阶段的认识。

如果孩子能够主动说出“我这次吃了18个饺子”或者“我现在又有了1双袜子，这样我就有7双袜子了”这样的话，就说明他已经达到初级阶段了。

如果孩子说话中主动运用了数字，而且用对了，就说明孩子对数字的认知能力进步了。这种能力不是依靠聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

考试能够测量的。只有依靠妈妈对孩子平时表现的观察，尤其是言谈话语中流露出来的数字运用的表现。运用语言其实就是大脑层面对各种词汇的操作，运用了数字，大脑神经元的活动区域就扩大到了左脑。只有当左脑中的数字混合了右脑的形象描述时，数字概念才会得到进一步发展。

有许多孩子到了9岁时，对数字的抽象理解才仅仅到达中级阶段。根据历史记载的曹冲称象的故事来看，实际上是曹冲在6岁时数字概念就发展到了深层阶段，可以对任何事物进

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

行数量的操作，并且不受事物表象差异的影响。

我是从小学四年级起开始写日记的，也就是说，9岁之前，我的生活中爸爸妈妈的许多做法都没有文字记载可以查看了，只能通过我9岁之后的一些记载来推测妈妈对我在数学方面的启蒙作用。

根据皮亚杰对儿童思维发展的研究结果：孩子3岁可以建立初级阶段的数字认知，6岁可以发展到中级阶段，9岁可以到高级阶段，12岁左右

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

应该实现深层的抽象认识。

目前的学校教育中，从教科书到老师的教学方法，99%的内容都是直接发展到对数字的操作上，比如加减乘除。但就连加减乘除的概念都没有做到让孩子真正理解，而只是让他们机械地、照猫画虎地当成一套流程来操作，以期熟能生巧。当然，耐心、符合认知规律、阶段性辅助孩子建立概念、从具象到抽象和深刻掌握概念的意识都完全没有，更不要说教学行为和教学方法了。

面对这些问题，每个家庭都是无意识地走过来的，孩子似乎只好听天由命了。我也只能感谢妈妈从我小时候在概念上对我进行的循序渐进的引导——让我上楼的时候数楼梯、坐车的时候数站数、数米粒、称重量，大量的量化活动让我较早地建立了数字概念，虽然自己说不出来等量代换，却能够完全自如地做出等量代换这个概念下涉及的任何题目。

加法对孩子来说也是一个抽象的概念，也有四个理解的层次，并不是会做加法就等于理解了加法的概念。

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

- 层次一：知道加法是一个操作动作，是数量的增加过程。多了一个苹果的意思就是原来苹果的数量多了1。
- 层次二：知道加法是一种运算，可以针对任何事物进行。苹果也可以加梨，意思是总体拥有的数量增加了。
- 层次三：理解加法不用考虑次序，先多了1个、后多了3个，与先多

了3个、后多了1个是一回事儿。

- 层次四：加法概念的扩展。和、总和、一共、多了、所有、全部，这些词汇都是加法的不同表达，都是一个意思，就是加法。

同样，减法、乘法、除法都有这样的四个认知过程。学校教育中依靠大量的模仿、类型练习，强迫孩子熟悉操作过程，在完全不理解加法核心本质的基础上生硬地运算，结果会造

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

成三方面的不良影响：

- 破坏了认知次序。孩子失去了询问或者思考原因的能力。
- 破坏了对数学的感觉。对孩子来说，觉得数学就是与生活没有什么关系的一堆操作、运算，只要记住就好了。
- 破坏了求知的能力。泯灭了孩子认识事物的好奇心，从而养成看一遍然后照猫画虎就可以了

的惯性，更导致今天的中国到处山寨流行。没有创新的能力并不是缺乏制度、缺乏激励，而是人们的创造力从小就已经被非常彻底地扼杀了。

我清楚地记得，在上我家四楼楼梯的过程中，我认识到先上三级台阶然后再上五级台阶到达的位置，与先上五级台阶再上三级台阶的位置是一样的。这是我自己认识到的，而不是像许多其他孩子一样，嘲笑地说这你聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

都不知道啊。其实，他们是在学习了加法法则中的先后次序无关后才知道的，而我是通过生活体验知道的。结果都是知道了，由于知道的过程不同，我对加法法则的理解就更加深刻，而其他的孩子则仅仅就是知道而已。

妈妈能做的事情很多。不妨参考我提供的认知过程、概念，从具体到抽象的发展阶段，运用孩子生活中的事物作为与孩子交流的切入点，让孩子通过参与活动，渐渐建立起头脑中的数字概念、加法概念。

妈妈教的数学

- ◎ 可以帮助孩子清点自己的物品，定期记录并比较。
- ◎ 帮助孩子记录自己的饮水量、饭量、体重。
- ◎ 让孩子帮助妈妈做事，过程中增加数字活动，比如清点冰箱中有多少种不同的物品。
- ◎ 帮助孩子建立加法概念，根据四个阶段来练习。不同物品可以相加的仅仅是重量、体积、个数，而不是类别，比如，苹果与梨可以相加的仅仅是重量、水果数量，这

就是建立单位的概念。

在杭州有一个妈妈群，带头人是一个听过我讲子女教育课的学生，她是一个5岁孩子的妈妈。这个群每周会从我这里领取一个任务。其中有一个周末的任务是让孩子搭积木，比如乐高的积木，搭成什么形状都可以。要求搭好后，清点一下用了多少积木、用了多少种不同的积木，搭出来的东西的长宽高是多少。这些数字都要写在纸上记录下来。四周后，用同样数量、同样类型的积木重新搭建一次，看看在长宽高上能否超越前一次做

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

的。这个过程本身，就是孩子理解数字概念的过程。

表面上，孩子说不出来自己理解了数字的概念，其数学成绩也不会立刻表现出来有明显进步，但是他们在脑海中渐渐形成了更加深刻的数字概念，等上了小学二三年级，就能够比较明显地表现出来。

妈妈教的数学不是招数、技巧，也不是口诀、宝典，而是让心智开启的钥匙，让兴趣迸发的力量。大脑智力健康没有灵丹妙药，只有长聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

期坚持正确的方法，才能日久天长，牢固而不动摇。

作为尝试，你可以看看下面这段话中，哪些词汇其实是孩子不理解的：

同学们排成一个方阵进行广播操表演，小海的位置从前、从后、从左、从右都是第6个，问：参加广播操表演的共有多少

人？

也许你可以从中悟出一些道理，那就是，教育孩子的过程，首先是自己有把握理解并能够用孩子的语言讲出来的过程。

这个回合是全书最难的一个章节。难点主要体现在三个方面：第一，有了抽象的结论，比如理解概念的发展阶段。第二，形成了因果。把孩子的表现当作现象，给出了符合逻辑的结论。第三，对读者有行为要求，比如建议妈妈做的事情。

词汇是递进的，一个阶段有一个阶段的理解，从认识常见的词汇到少见的词汇，就是一个过程。作为读者，阅读到这个回合，已经完成一本书的80%，您是否已找到可以运用到自己生活中的经验了呢？

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

《妈妈教的数学》是一本操作性的图书，属于文化类别。您在购买的时候设想过这本书能够提供什么吗？读一本书的目的到底是什么？

A：能够落实到现实中的具体操作。

B：有启发的知识和理论。

C：得到别人成功的经验和教训。

D: 了解一些新想法
和趣闻。

(参考答案见全书末尾)



满分学生没有未来

◎错误是学习的最佳机会，把握这样的机会才能够带领孩子一步一个脚印地走过理解的道路，找到自己独特的方法。

◎妈妈最应该扮演的就是陪伴的角色、好奇的角色、能够不断交流的角色，并在交流中促进孩子自我意识的提升，能够反思做过的题目。

1975年3月19日

星期一

阴

今天回家，被妈妈翻书包找到了上个礼拜算术小测试的卷子，发现我有3道错题，卷子上都已经改好了，老师讲了正确答案，我就会了。妈妈问我，我是哪年出生的，我说是1963年。然后妈妈问我，那么我出生前1000年是哪年，我说是963年，妈妈又问我，2000年前是哪年，我说37年前，妈妈让我自己算，1963年前的37年是哪年，我算了算，发现那是1926年啊，我就蒙了。

读到这段日记，我尝试回忆当时错的题到底是什么，依稀记得卷子上

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

有一道题，问现在是1975年，2000年前是哪年。我肯定是写错了，而且写的应该是25年，老师给的正确答案应该是“公元前25年”。也就是说，25年是正确的，但要在前面写上“公元前”。实际上，日记里妈妈问我问题的这一天，我还是没有弄懂“公元前”的意思，尽管我已经将老师给的正确答案写在了卷子上。

后来我自己当了老师后，才发现了这一点：孩子在听到老师讲的正确答案后，会把正确的答案写在卷子上，不管脑海中理不理解。比如“公元

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

前”这个词，老师肯定讲解过，有一些孩子理解了，有些孩子没理解，我就是其中之一。在课堂上我并没有告诉老师我没有听懂，老师当然不会重新讲一遍。在测验的时候，孩子做错了题目，这个时候应该是老师发现并引导孩子认识错误的好时机，然而多数老师的做法是把正确答案讲出来，然后问孩子们懂了吗。像我这样的学生，肯定不会说自己没懂，而只是将正确答案写在了卷子上。一个老师面对着40多个学生，没有机会关注每个学生是否真正彻底理解了一个概念，

学生貌似理解了，实际上还是似懂非懂。类似的含糊不清累积起来，错误就会越来越多，错误多了内心深处受到的打击也就越来越大，渐渐对数学就越来越没有兴趣了。

妈妈面对的是一个孩子，比老师要好多了，不用面对那么多学生，所以也就有足够的耐心关心自己的孩子是不是真正知道错在哪里。我是真的不知道错在哪里。那天的日记没有详细记录妈妈是如何教我的，不过后来有一道题我在日记中写了。

1975年4月29日	星期二	晴
今天期中考试,考后我记住了一道题:历史上商鞅变法是公元前356年,求距现在已经多少年了。我肯定回答对了。		
1975年4月30日	星期三	晴
今天发了算术期中考卷,我得了100分,特别高兴。妈妈说五一到书店给我买书。我想好了,要买一本公元前的书。		

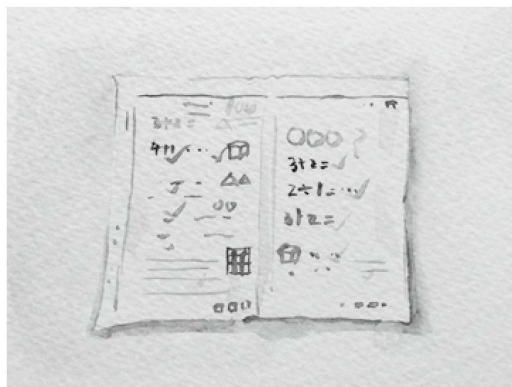
通过这两天的日记片段,我能够看出来,“公元前”这个概念我当时确实是懂了。但在妈妈用我的生日来测试我的时候,我肯定还似懂非懂,后来才明白现在日期中的年份总有一个开始,都叫1963年、2008年什么的,可是之前呢,就通通叫公元前多少多聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

少年，理解了这一点，与此有关的任何题目就易如反掌了。

1975年4月4日	星期五	阴
今天晚上，爸爸看报纸，说秦始皇统一中国到今天已经2196年了，他在统一后11年就死了。这时妈妈问我，秦始皇是哪年死的。那就是现在的1975年减去2196年，就是221年，也就是公元前的意思。然后减去11年，也就是2185年前死的。现在是1975年，就是公元前210年死的了。		

今天看这段日记，能够看出来一个孩子的思考过程，虽然麻烦，但是概念理解正确。感谢妈妈看到我的测试题，并能够变化形式不断地追问。在应对这些问题的时候，我脑海中的

概念也渐渐清晰起来——时间节点不过就是一个起始点而已，之后应该说“公元后”，只是平时省略了，但“公元前”不能省，不然就不清楚说的是哪一年。



妈妈们在对待孩子的时候，经常陷入两种情况：孩子考了100分就夸奖孩子，看到有犯错的地方就生气。有些情况下妈妈也会给孩子讲解，但是在讲解时却经常使用成人语言。孩子不会表达自己是否真正理解了，只是貌似把正确答案写了出来，其实那不过是孩子自己在尝试，尝试运用一个概念来应对所面对的题目。多数妈妈几乎已经忘记了自己学习数学的过程，有时又会运用后面学到的知识来解决孩子当前面对的题目，所以难以给孩子讲明白，孩子对过程就似懂非

懂。错误是学习的最佳机会，把握这样的机会才能够带领孩子一步一个脚印地走过理解的道路，一点一点地找到自己理解数学概念、运算方法、知识原理的独特方法。

孩子在成长的过程中，小学阶段做数学题会犯五类常见的错误，分别是：

- 粗心导致的错误。
- 步骤跳跃导致的错误。
- 规则运用模糊导致的错误。

- 题意理解偏差导致的错误。
- 对概念理解不准确导致的错误。

第一类错误：粗心。遇到孩子出现这类错误的时候，妈妈经常不由自主地埋怨孩子。“怎么这么粗心啊！这你都算不对啊！”这些话不能起到让孩子下次细心一点的作用，只会让孩子更紧张。对这类错误，要看类似的题目孩子会不会，如果类似的都做对了，就没有必要纠缠于粗心的错误。粗心是孩子大脑发育过程中的好聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

事，凡是从小就细心的孩子，其创新能力通常也比较薄弱，举一反三的表现不如粗心的孩子。

第二类错误：步骤跳跃。在计算的过程中，书面上跳跃了步骤，而大脑中没有比较严谨、熟练的步骤，想到了下一步，就可能忽略了这一步。这个时候，妈妈可以要求孩子在纸上把每个步骤都写下来。一个步骤就完成一个动作，通过细致的步骤来促成大脑建立清晰、明确的过程，避免以后犯类似的错误。这个时候不是要求孩子速度的阶段，许多家长经常要

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

求孩子快一点做题，尽快完成作业，长此以往，孩子长大后也就必然会过度关注速度、忽视细节。忽视环节的精益求精，轻视过程，只关注结果，也会让人产生以结果为唯一导向的观念。大学生浑浑噩噩四年只为混一个文凭，在校园里耗费青春的现象也几乎都是类似的心理导致的。

第三类错误：规则模糊。数学涉及大量的运算，所有的运算都涉及许多规则，无论是加减法的规则，还是乘除法的规则，或者几何图形中线段的规则、面积的规则、角度的度量

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

与规则等。规则是数学的一块重要基石。没有规则，可以说就没有数学。这也是数学与社会科学有联系的一个方面。社会科学中也经常涉及各种各样的规则，比如先下后上。数学的规则集中在数字上，到了中学才渐渐过渡到针对字母的各种规则，而孩子在执行规则的时候又常会混淆在一起。先乘除后加减就是一个高级的规则，是对规则的一个规则。在这个方面的错误多了会让孩子失去耐心，继而降低信心。

第四类错误：题意偏差。 在小聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

学四、五、六年级的错误比率中题意理解偏差高达35%。这个阶段，教材中会出现一些孩子从来没有接触过的词汇，而数学老师又没有特别关注孩子对题目中词汇的理解，也没有专门准备强化对事物关系理解的教学内容，这就导致孩子阅读应用题时连蒙带猜。有时猜对了也不知道自己是怎么猜对的，猜错了老师也不给解释，直接给了正确答案，抄完就等于改错了。

第五类错误：概念曲解。这类错误属于一定要格外重视的，连续3
聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

个月的概念不清，将带来继续学习的重重障碍。必须采用前面教过的方法，引导孩子把做题的思路、思考的过程都说出来。妈妈在听的过程中不要急于纠正，而应不断地询问，让孩子讲给你听。根据我的教学实践，孩子在讲的过程中，大约85%以上都能够自己领悟。那些自己领悟出来的概念，孩子通常就不会忘记了。老师讲的、妈妈讲的，都不如孩子自己的领悟对大脑的刺激深刻，这种深刻刺激能够使孩子彻底掌握概念。

这里提供一些孩子常犯的错误的

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

例子，请读者来判断一下哪些是粗心，哪些是步骤跳跃，哪些是规则模糊，哪些是题意偏差，哪些是概念曲解。

第一题

$$15-9\div3=$$

A.11 B.2 C.3

D.12

这道题，孩子的选择是D就是正确的，而现在你的孩子选择了B，你认为这是什么错误。

第二题

$$22 \div 3 = 3 \text{ 余 } 1$$

老师在这个结果上画了一个大叉。请读者判断，这是什么错误？

第三题

$$56 \div 7 = 24 \div ?$$

供选择的答案有：3、4、6、8。

孩子的选择是8，但正确答案应该是3。
你认为这是什么的错误。

第四题1.

丹丹去买了一些

水果，等开班会给大家吃。她买了**1.5**千克的橙子，**0.9**千克的苹果，**0.7**千克的香蕉。晓梅数了一下，苹果共有**7**个，那么平均一个苹果多重？

A.15克 B.130克

C.270克 D.990克

孩子选择了A.15克，请判断他的错误类型是什么。

第四题2.

其实丹丹带回来的水果共重3.9千克，原来还有芒果，那么芒果多重？

A.0.4千克 B.0.8千克

C.0.9千克 D.1.3千克

孩子选择的是D.1.3千克。你觉得孩子的错误属于哪一类。

第五题

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{?}$$

问号的地方可能是3、4、5、6，孩子的选择是5。请判断孩子的错误

属于哪一类。

数学最重要的学习其实就是两方面，一方面是规则的熟练，另一方面是概念的理解。规则的熟练需要重复步骤来不断练习，打下扎实的基本功。而概念的理解则需要首先弄懂词汇，然后扩展到对概念的认识。

有一些题目的错误容易判断，不过最好的判断还是让孩子自己说出来，这就是自述法。通过孩子的自述，妈妈能够找到孩子的错误类型，也能够决定是否应该给予足够的重视。有

时候，孩子在自述中自己发现了问题，也就自己解决了困难。

前面的两道题都是规则运用的错误。第一题是先乘除、后加减的规则运用。第二题是不能直接写余1，应该写成分数的形式，这是规则。

第三题是步骤跳跃，让孩子先完成等式的左边部分，写出等于8，再完成等式右边的部分，8是24除以多少得到的。步骤严谨以后，答案自然就对了。

让孩子自述第四题的第一小题后得知，孩子没有理解题意。孩子说：“买了那么多水果，我怎么知道一个苹果多重啊！”这就忽略了小题中给的一个条件，那就是有7个苹果，只需到题干中去寻找苹果的重量，然后进行除法并找到最接近的数字就可以了。这属于偏差题意问题，需要引起妈妈的重视。

第四题的第二小题，孩子在自述的过程中知道了正确的答案，这就是属于粗心犯错了，不是严重的问题。

第五题孩子的答案是5，让孩子自述，判断出这是概念错误，就是没有明确分数转换、化简的概念。这个孩子在类似的题目上都出现了错误，可见孩子在学校学习分数变化的时候没有听懂。妈妈必须从分数最基础的概念开始讲起，否则以后涉及更多的分数变化，孩子就越来越难以应付了。

在我的日记中，类似妈妈教我认识概念的内容有本回前面提到的“公元前”，还有“素数”，也有四则运算中“括号”、“括号内”与“括号外”的不聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

同等。这些例子证明我不是犯了粗心的错误，就是犯了概念理解偏差的错误。

我的印象中，妈妈从来没有表现出对分数特别关心。我考过满分，妈妈没有为此特别高兴，或者至少没有在我的面前表现过；我也考过不及格，妈妈也没有表现出特别的烦恼和焦虑。每次她都会仔细看我做的每道题，有时还会在纸上写写画画，我知道她也在做题，有时让我将自己的解法说出来，有时我说着说着又有了新的方法。

在数学的学习过程中，分数从来都不是最重要的。想想看，牛顿在世的时候，有谁能够给他的成就打分呢？考试仅仅是为了了解孩子对已学知识的掌握情况，而不是要进行比较，更不能把考高分当成人生的目标。考试出现的错误是学习与纠正脑海中对概念错误理解的最佳机会。我的妈妈选择公开地与我讨论考试卷子，让我后来再也没有隐藏过试卷，无论考了多少分，我都愿意让妈妈看。最高兴的是，有时妈妈也会做不出来，又看不懂我做的，这时我就有机会给妈

妈讲解题目了。至今我从心里乐于教数学，热衷于辅导孩子数学，并能够快速找到孩子学习数学时卡住的原因，这些能力都应该归功于妈妈与我的交谈——面对考试卷子的交谈。

妈妈教的数学

- ◎ 读三年级的孩子粗心错误会多一点，不要打击孩子。只要发现后提示他看看以前做对了的类似的题目，让孩子自己找到错误原因就可以了。坚决不要对孩子进行惩罚，尤其是抄写多少遍这种简

单、机械、重复性的工作。
保护孩子积极的自尊心更加重要。

- ◎ 读四年级的孩子跳跃步骤、规则模糊、一下记不全的情况较多。这个阶段需要变化题目，让孩子不能跳跃规则，可以给他大一点的纸张，给他更多的时间。
- ◎ 读五年级的孩子渐渐会出现一些概念类型的错误了。此时，比较有效的方法就是引导孩子把想法说出来。把对题目的理解说出来，这样妈妈就能够发现是对题意理解有偏差，还是对词汇理解有

误，然后有机会重新讲题目，或者对词汇进行详细地解释、举例。

- ◎ 六年级是过渡阶段。概念要非常清晰，规则要非常熟练，这是为中学打下扎实的基础。这个年龄段的孩子各种错误都有可能出现。这也是小学六年的一个总结，学校的老师没有时间、没有精力针对每一个孩子进行如此细致的教育，那么这个任务自然就落在了父母身上。当然，一般妈妈在家的时间更多，也就义不容辞了。

如果孩子将作业都做对了，老师、家长都高兴。如果有错误，孩子经常受到指责。其实，孩子做题中出现的错误才是孩子进步过程中最宝贵的记号。小学阶段总是能够得一百分的孩子，多数依靠的是记忆力，包括对规则的记忆、对概念的死记硬背，而不是灵活地理解。考试分数总是很低的孩子问题大多出在概念方面。当孩子遇到一个没有太多经验的老师的时候，在概念理解、规则运用上表现出来的差距就较大了。

家长不要太在意孩子在小学时的
聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

考试成绩，有上有下是正常的，最重要的就是弄清孩子理解了什么、运用了什么。我的妈妈即使在我考了满分的时候也会问我做题用了多少时间，哪道题用的时间最长，哪道题最没有把握，考试后同学之间议论最多的是哪道题。通过回答这些看上去完全无序的问题，我渐渐开始对自己的做题能力有了把握，知道做得快的题目我容易粗心，做得慢的题目可能是理解问题，过程太长的题目总是把规则弄乱。这真的就是本回的最佳注解，就是在错误中学习到的数学。

老师在检查孩子作业的时候，经常只看结果是否正确，而完全忽视了思考过程。有时，答案是孩子蒙出来的，碰巧对了，如果不让孩子说出来，也就不知道思考过程中概念的运用是否正确、对规则是否理解。多与孩子交谈，妈妈可能会担心，我也不会啊！那就拿出学习的心态，让孩子教你，这也是培养孩子成就感的好机会。如果孩子在给你讲解的过程中建立了自信，这对他在外面与别人打交道也有好处。妈妈没有必要在孩子面前扮演全知全能的角色，也从来没有这

样的妈妈。妈妈最应该扮演的就是陪伴的角色、好奇的角色、能够不断交流的角色，并在交流中促进孩子自我意识的成长，能够反思做过的题目。不要用厌恶的心情看待错题，要用拥抱的姿态来面对错误的答案。

现在的小学、中学教育非常流行出选择题。选择题是忽视过程的，只对老师阅卷有帮助，但对发现孩子的错误类型并没有什么具体的帮助。在这种情况下，即使看到孩子做错了，也不知道是概念上的错误，是粗心犯错，还是对规则不熟悉……这时，最聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

好的办法就是父母与孩子一起讨论，让孩子把做题的步骤、想法说出来。

父母能够对孩子进行辅导，并不是因为他们会做题，而是能够理解题目。有时完全可以在自己不会做的情况下，通过不断与孩子交谈，从而促使孩子矫正自己的思考方式以及掌握对概念和规则的运用方式。

确实不是耸人听闻，无论是科学界，还是艺术领域，杰出的、有成就的人，他们在求学期间很少出现所有学科考试满分的情况。要不就是大考小考一百次，有三两次满分。

如果没有做错过题目，就等于没有学到过知识。做错题是学习的机会。这个回合中小学生数学五类常见错误的内容来自我的论文，基于对北京三所学校共882个学生，2554份试卷分析的结果。

这五类，可以全面运用在孩子试

卷错题分析上，并能够准确找到错误的原因。

目前中国的实际情况是，学校老师将自己的一部分教学任务分包给了学生家长，家长就担负起作业检查和辅导的任务了。而家长做这件事难免也不专业。在辅导孩子作业的过程中最常见的错误是：

（最常见的选项排列在前面）

A: 用孩子没有学过的知识教孩子。

B: 帮孩子解题，并让孩子抄一遍。

C: 指责孩子粗心，通过重复多做来强化记忆。

D: 到网上搜答案让孩子自己理解。

（参考答案见全书末尾）



不会做题，只有三种可能

◎在小学阶段，孩子最需要掌握的是规则的运用，最需要启发的是对规律的认识，最容易卡住的地方是题意理解。

◎面对孩子留空的题目，父母应该明确自己的位置。作业是孩子的，不要帮助孩子把题目做出来，而应该由他自己独立去完成。

1975年9月12日

星期五

多云

我没有做出来的题目，好多同学也没有做出来，

比如这道题：星号的地方可以选择的数字有

61, 63, 69, 70；小太阳符号的地方可以选择

的数字有5, 6, 7, 8。妈妈也看到作业本上的

这个题目了，她让我猜测应该是什么。我觉得不能随便瞎猜，爸爸说不

会的题目就是不会，的确不能瞎猜的，就是要猜，也要有一点线索，至

少在猜一个数字的时候有理由。妈妈也没有做出来，爸爸从来不看我的

数学作业。晚上睡觉前，妈妈让我重新说一遍这个题目，说着说着我就

做出来了，妈妈也同意我猜测到的规律。

★		75	
11	59	16	
41		18	
21	20	12	★

1985年10月19日

星期六

微风

奥数班的孩子总是很有创意，哪怕遇到不会做的题目也是如此。当我在

黑板上写出这道题的时候，有的孩子已经开始在猜测答案了。有的孩子

猜对了，有的猜错了。重要的不是猜测正确与否，而是猜测过程中的思

考方式。

这道题是上周六的一道测试题，45分钟要做出类似的30道题目，孩子

的时间压力较大，而这道题许多孩子都没有做出来。今天我又在黑板上

写出了这道题，就听到了下面的反馈。卢萧晨：小太阳的那个地方应该

是6。因为左边的41其实就是下面的两个格子21和20的和，那么右边

的18也应该是下面两个格子的和，一个是12，另外一个就是8。这时

全班同学都笑了，萧晨觉得自己说错了，立刻纠正：“哦对，应该是6。”

石慧妮：上面那个星号的地方应该是70，就是11加上59，你看右边的

75，就是59加上16得到的，那么星号的地方肯定就是70。重要的不是

孩子知道答案是什么，重要的是思考的方式。

★		75	
11	59		16
41		18	
21	20	12	⚙

父母辅导孩子完成数学作业，当然希望看到老师的对号，看到叉号就会心情沮丧，并试图找到孩子的错误点。而看到孩子留下的空白时，父母的心情就比较复杂了。这时大概会有两种情况：一种是自己会做，另一种是自己也不会做。前一种还好一点，

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

至少可以尝试给孩子去讲解这道题的做法；而后一种就比较糟糕了，难免会想：在孩子面前说我也不会这道题，孩子心里不就更加觉得他不会是理所应当的了么！

孩子有不会做的题目是很平常的事情，此时，父母应该怎么办？常见的做法是父母自己做出来，然后讲给孩子听。但除了有时父母自己也不会以外，他们用来解题的思路也可能是孩子目前还没有学到的，比如用代数知识解决应用题。再就是可能让孩子形成依赖心理。

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

面对孩子留空的题目，父母应该明确自己的位置。作业是孩子的，不要帮助孩子把题目做出来，应该由他自己去独立完成。辅助的意思不是帮助，辅助是以辅导孩子为主，自己为辅。也就是说，父母可以不断地与孩子交谈、讨论这个题目，但没必要去做这个题目。孩子从不会做的题目中能够学到解决问题的思考方法，遇到有不会的题目——在大脑中空白区域，从来没有遇到过，从来没有经历过，这都是好事。这时父母应该提供各种讨论内容，让孩子进行自述。他

们对题目越熟悉，大脑中的细胞活跃程度就越高，对智力发育就越有利。

妈妈教的数学

- ◎ 让孩子把题目讲出来，用孩子自己的语言来讲。
- ◎ 讲的过程，父母点头就可以，表示听到了。
- ◎ 等孩子都讲完了，父母开始提问，就刚才没有听明白的地方一个一个地询问。
- ◎ 在以上过程中，不断重复孩子讲出来的内容，并渐渐组织成一段完整的话，来把题

目说清楚。

图书都是有页码的，页码从**1**开始，然后是按照**2、3、4**这样的顺序下去。有一本书的页码用了**258**个数字，问：这本书最后一页的页码数字是几？

如果孩子的试卷上这道题是空白

的，父母应该让孩子把自己对这个题目的理解讲出来。孩子会说：页码的数字是几，这是什么意思？父母可以让孩子从头开始讲这道题目。孩子也许就会说，其实就是一本有第1页，也有第2页，然后就这样按顺序排下去了。然后父母可以追问孩子：那么，用了258个数字是什么意思？常见的情况是孩子无法回答，这就是孩子卡住的地方。也就是说，孩子没有理解题目的意思。没有看懂题目，当然也就看不懂题目要求做什么。

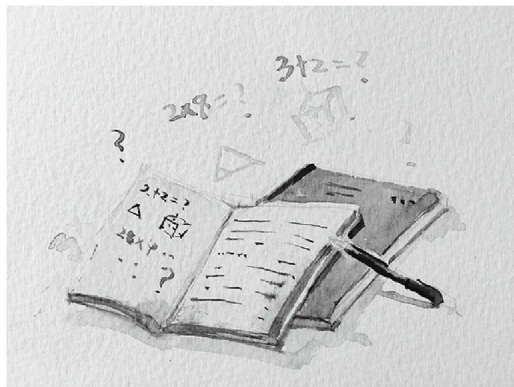
这个时候，最好的方法就是拿来聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

一本书，让孩子随便打开，比如翻到了第78页，你可以告诉孩子，这就是用了两个数字，一个是7、一个是8，表示的就是第78页。然后向后多翻几页，比如到了126页，让孩子说用了多少个数字，如果孩子回答的是3个数字，一个是1、一个是2、一个是6，这就说明孩子至少懂了题目的意思。接着可以让孩子从第1页开始数到第10页，看用了多少个数字，如果孩子能够数出11个数字，说明孩子真正理解了题目。

这时再让孩子重复一遍题目。孩

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

子应该很快会发现，从11页开始到99页每一页都用两个数字，共有89页（包括第11页），这就已经是178个数字了，加上从1~10的11个数字，就是189个数字了。从100页开始到999页，每一页都用掉三个数字，而题目是用了258个数字，那么258减去189，还有69个数字，除以3就是23页，要算上第100页，那么最后一页就是第122页了。



要知道，这样的过程才是父母应该辅导孩子的过程！父母应该通过提问，让孩子重复地回答，并在孩子不理解的地方，用实例来演示。通过亲手摸到图书并数每一页的数字，孩子才会知道用掉的数字是什么意思，也

才能够正确地理解题目及其目标。

通过这个例子，父母应该理解孩子留下空白的题目通常有3种情况，这3种情况下孩子会宣布“这道题我不会”：

- 看不懂较多的词汇。
- 看不懂题目的目的。
- 看不懂题目已经说明的情况。

图书页码这道题，多数孩子的表现都是看不懂题目，或者从来没有遇

到用这样的语言来说明一个问题的情况。也就是说，这道题并不完全是一个数学题目，还有语言理解上的要求。对语言表达生涩的孩子来说，以前没有遇到这样的题目当然就会觉得陌生，从心理上先认输了，索性宣布不会就是最简单的事情了。

隔壁有一位老大爷，他的年龄除以9余1，如果除以4也余1，问：你知道这位老大爷的岁数是多少吗？

有43%的小学三年级的孩子在这道题目上留下了空白。让孩子自述，孩子说：“不知道除以9余1了以后，干吗还要除以4啊。”孩子不能够理解人类思考问题的基本模式——知道了一个情况，如果再知道另外的情况，就能够更好地判断一件事情。比如，你可以跟孩子讲，从楼外看家里的客厅没有亮灯，是不是能够知道家里没人？孩子可能会说还要看卧室的灯是不是亮的，也可能会说这样也不能确定家里没人，因为可能睡觉了。通过聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

这样的举例可以发现，孩子在生活中能够通过观察多方实物来进行判断，但在题目上就理解不了为什么多给一点情况就能够帮助推测答案了。

用9除和用4除都余1，什么数字是这样的呢？父母说这题多简单啊，不就是公倍数的问题吗！老大爷的岁数是4和9的倍数，就是36，都余1，那就是37岁。你决定这样讲给孩子听吗？如果这样的话，一连串的问题就来了：“什么叫公倍数啊？为什么余1就要加1呢？你怎么知道都是4和9的倍数呢？哦，倍数是什么意思啊？”

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

这种情况下，父母便陷入了前面提到的第二种情况，就是用了孩子还没有学过的术语，因为孩子没有接触过公倍数的概念。

面对这道题的空白，父母正确的做法是：明确自己的目标，那就是尽量辅助孩子理解题目，然后通过举例来渐渐引导孩子自己去接近题目的答案。

你可以问孩子9除以9是多少，再问10除以9是多少，然后问12除以9是多少，接着问18除以9是多少，最后

问什么样的数字除以9会余1呢？引导孩子自己说出来，那就是乘以9以后再加1的数字。这一轮问答结束，就可以开始用4来询问了。渐渐地孩子能够猜到37，这时让他自己去尝试除以9是多少、除以4是多少。孩子都懂了以后，再追问孩子，如果一个人37岁，我们会叫他老大爷吗？

至此，才彻底完成了这道题测试的全部内容。孩子在意识中熟悉了数字的性质，知道它除以一个数后有余，就能推算出这个数字具体是几，同时还学会了对老大爷年龄段的判断。

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

一个笼子里有**3**只鹰，有一只是每**3**个小时叫一次，还有一只是每**8**个小时叫一次，另外一只每**12**小时叫一次。开始计时的時候，**3**只鹰恰好同时叫了。问：未来的**80**小时内，两只鹰会同时叫几次？

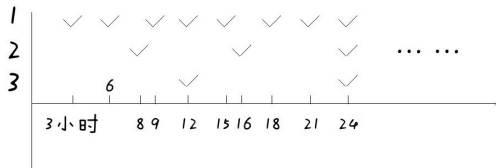


图10-1

如果父母看到孩子在这道题下留了空白，先不要着急，要明确目标，即辅助孩子彻底、正确地理解题目的意思。让孩子采用自述法把题目讲出来，用他自己的话来讲。孩子在一定程度上是能够把事情讲清楚的。这时，父母的目标还没有完成，应该要求孩子把他讲的写在纸上。如果孩子完全不会写，父母可以先写几个，然后

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

让孩子来进行填空，总之要把知道的情况都写下来。

“这样做多麻烦啊！直接告诉孩子不就行了吗，而且孩子也肯定理解。”没错，你倒是图省事儿了，但却剥夺了孩子获得快乐的机会，那是他自己独立发现答案的快乐。同时，你还剥夺了他建立自信的机会，因为每次独立做出一道题的时候，孩子都会建立起一点信心，如果你替他做了，让他在心理上开始依赖你，他就会想着考试的时候你能不能也在他的身后呢？

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

教育孩子做题、解题、思考题目的过程对我来说是快乐的。我看到太多的孩子在我这里建立起信心，在面对数学题目的时候不再发怵、不再恐惧，反而敢于迎接挑战，哪怕是用特别原始的、纯粹的、麻烦的方法来解决问题。“啊哈”的一个瞬间，问题迎刃而解，心理上自己又向前迈进了一步。

遇到不会做的题目时，孩子仍然能够学到正确地理解题目的方法和寻找线索的方法。这两项都是数学学习中的重要内容，前者是理解问题，后

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

者是思考方法的建立。学习数学不仅能够学到规则、运算、概念，更重要的是明白能够运用到所有领域的其实是理解一个事物的方法，以及正确的切入点。

在我自己的成长历程中，每一个阶段我都能够在留空题目上受到重要的启发，知道自己学到的东西里哪些还不太准确、不太熟练。从不会做的题目中，我学到更多的是通用的方法，并能够跳跃一个级别，越来越熟悉更高层次的思考方式。尤其是学到了在反复阅读题目的时候，如何在字里

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

行间，找到蛛丝马迹，从而扣住题目的脉搏，理清线索，让题目中所有的条件都为我所用，以揭示出正确的答案。

不会做题目也能学数学，其实何止是学数学，学到的是超越数学的本领，学到的是对世间万物的思考模式，学到的是理解世界的思路。找到孩子的留空题目吧，也许你能够帮助孩子提升一个境界，为未来铺设一条通路。

我把这些年教学中常见的留空题

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

目整理了一下，写在这里供读者思考，用来启发孩子去寻找理解的思路和解题的线索。

商店以每双**6.5**元的价格购进一批凉鞋，售价每双**7.4**元，卖到还剩**5**双时，除成本外还剩**44**元，问：这批凉鞋共有多少双？

一个分数的分子与分母的乘积为**60**，问这样的最简单的分

数有几个？

把**5/14**化成小数，
小数点后第**2013**个数
是几？这些数的和是
多少？

在小学阶段，孩子最需要掌握的是规则的运用，最需要启发的是对规律的认识，最容易卡住的地方是题意理解。这就涉及题目中用的词汇，父母需要协助孩子去理解这些词汇，而不是帮助他们把题目做出来。父母做不出题目很正常，但是不能协助孩子

进一步理解题目就不应该了。

让孩子阅读以上几道题后，可以让他们开始自述。即使做出来了，也要让孩子自己说一遍。目前中国的教辅图书普遍存在一个问题——只用数学的语言和形式来解决问题，却忽视了用孩子能够理解的语言来把事情讲明白。孩子其实不是不会思考，而是不太习惯用数学的方式来思考。父母想要弥补这些不足，就应该鼓励孩子大胆开口讲出来，让他一点一点地在脑海中建立对题意的理解。

前面三道题中第1题的要点是：帮助孩子理解“售价、成本、花钱购进、卖出”这四个词的意思，在理解了意思以后，几乎所有孩子都能够自己找到正确的答案。第2题的要点是：帮助孩子尝试，跟3只鹰的题目一样，一个分数一个分数地去尝试，直到孩子自己发现规律并得出答案。第3题的要点是：孩子是否敢于尝试化解为小数这个运算的规则。不做任何动作，这道题仅仅靠思考是做不出来的，必须拿出行动，耐心地一个小数一个小数地除下去，看看能够发现什

么规律。牢记，不会做的题目也能够让孩子学到关于数学的理解和思考方法。

牢记，孩子不会做的题目通常有两种：

- 知识没有学过。
- 知识学过但忘记了。

因此，发现孩子有完全不会的题目时，父母要明确帮助孩子的目标是什么。不是替孩子把题目做出来，而是帮助他找到一条清晰的通路，理清

楚题目的情况，弄明白题目希望他完成什么，或者鼓励他提出自己的疑问。

在这个认识基础上，我们就能够理解为什么孩子对陌生题目会心生恐惧，以及对从来没有做过的题目缺乏深层认识。突破这些思维障碍的要点就是父母的协助，而非代替。

孩子做题出错，暴露出来的信息较多，父母能够顺着线索找到孩子理解的问题、熟练程度的问题或是规则不清的问题等。孩子在题目上留空、完全空白，就是不会做。这时，仍然能够找到信息，揭示出孩子头脑中可能的障碍，方法就是从原题中寻找。

三个看不懂，都在原题目中。去找原题中的术语，要不就让孩子用自己的语言讲一遍。讲的过程中，孩子自己的思维被语言梳理了一遍；这种梳理，能够调整孩子自己的思路，也

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

能够让大人听到孩子的障碍所在。这就是在面对不会做的题目时，找到的学习机会。

有些学生貌似会一个题目，实际上是照猫画虎，掩盖了头脑中没有理解、没有明白的本质。这种情况得到的结果就是，貌似会做题的学生，遭遇变形多一点的题目时，寸步难行。而不会做题的学生，通过反复思考，彻底懂了，遇到复杂一点的，照样会做。作为一个多年教学的数学老师，我恰好比较喜欢那些有不会做的题的学生，能够启发这些学生真正体会开聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

窍的瞬间。这五类，可以全面运用在孩子试卷错题分析上，并能够准确找到错误的原因。

当看到孩子的试卷上有空白的题目时，如下四个做法都是学生家长采用过的，哪个才是正确的做法

A：先给孩子讲讲这道题的意思。

B：先给孩子讲讲这道题要用的公式。

C：先让孩子讲讲自己

对这题的理解。

D: 先让孩子讲讲别的小朋友为什么会做。

(参考答案见全书末尾)

后记

外婆从四川成都来北京住在我们家时，我上初一。

“你妈妈在你这么大的时候，就能够背诵唐诗宋词了。”我的日记中记载了许多外婆说过的话，唯独没有找到这句，然而恰恰是这句在我的记忆中清晰无比，外婆说话时的眼神、语气，以及当时昏暗的房间，这些场

景都历历在目。

也恰恰就是这句话，让我下决心开始背诵唐诗宋词，从杜甫的《兵车行》到李白的《将进酒》，然后是白居易的《琵琶行》，之后是《古文观止》中范仲淹的《岳阳楼记》、王勃的《滕王阁序》等。仅仅一年时间，这些名篇我虽不能说是倒背如流，也可以做到从任意段落开始，流利诵出。

“你妈妈小的时候，在学校英文朗读比赛中得过奖，还有几何比赛也

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

拿过奖，80个银元呢，都是袁大头的。”这句我也记得，而且还看到了银元。拿在手里吹一下，放到耳旁，确实可以听到金属震颤的声音，悦耳动听。

我妈妈在家排行第二，她有一个姐姐、两个妹妹和两个弟弟，其中一个弟弟在十几岁的时候不幸夭折了。她的一个姐姐、两个妹妹和一个弟弟如今都是大学教授，在各自的领域也都小有建树，而我妈妈的命运却是坎坷的。我妈妈上初三的时候，就在成都参军了，当了一名文艺兵。那时的聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

她在部队能歌善舞，还是篮球场上的运动健将。但身体说垮就垮了，一场急性肾炎让她倒在了篮球场上。那时部队没有有效的医疗手段，急性变成了慢性，我妈妈走向巅峰的人生自此进入低谷，两次病危通知，与死神擦肩而过。

如今，妈妈回忆起这些，最感谢的是我外婆对她的精心护理和照顾。“如果不是你外婆，也许就没有你。”我心中还在琢磨这句话的实际意思时，妈妈接着说：“有了你，本来不打算要的，你外婆说生个孩子，还有机聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

会重新恢复身体，这机会只有女性有，这才决定要你，而且她说，坐月子她来照顾我。”

外婆还对我说过：“其他那几个孩子小的时候有的喜欢玩耍，有的喜欢画画，不过你妈妈画的都是线条、方块，不像其他孩子画玩具啊、画树木啊。她数数也是最快的，而且只有她能够教弟弟数数。”

我的桌子上有不少我作业的草稿纸，外婆看到一些格子，也看到许多算法，她说我妈妈小的时候也是这么

算的。那时，没有那种算法（她指的是乘法的竖式算法）。后来妈妈说起来我才知道，现在小学流行的竖式算法源自古希腊，而妈妈教我的格子乘法的方式源自古印度。

我后来学习数学，阅读了中外许多关于数学史的图书，发现尤其是在中国的古代数学中，没有形式上的乘除算法。乘除算法最早出现是在《九章算术》中，运用的是口诀计算方式，没有图形化过程。这也许是东西方文化表现形式的一个显著差异。

当我知道外公的职业是大学英语教授的时候，许多不解之谜也就迎刃而解了。应该是外公在参与编纂《韦伯英汉大辞典》的时候接触到西方的基础数学知识，外婆在协助他整理资料的时候也就熟悉了其中的一些内容，恰逢孩子成长的过程，便教给了我妈妈，妈妈又传授给了我，其中当然包括格子算法、手指乘九，还有棋盘格子中放米粒的故事。这些我在上大学学习数学的过程中检索过，都有资料能够查到。

回顾我自己的成长历程，数学对
聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

我的影响不是竞赛，而是那种思考问题的方法。追本溯源，若没有妈妈顺应我好动贪玩的特点而不知不觉掺入了趣味的数学，我怎么能够在心中培养了兴趣？若没有兴趣，我怎么能够苦中作乐，无数个夜晚解不出题目，茶饭不思，直到那个解法在脑海中瞬间贯通？

如果我的成长中存在许多偶然性，那么这个偶然性中是不是有必然的规律性的东西存在？这个想法其实也是缜密的数学思维。一旦获得这种必然性的规律，那么就能够扩大，能够聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

复制，能够对更多的人有帮助。在我的日记中，把涉及妈妈的那些小事汇总起来，才发现妈妈的作用对兴趣的建立影响竟然这么大，才明白那些闪耀的点滴不是来自学校，而是来自家庭，来自孩子心目中最重要的人——母亲。母亲的伟大不是停留在乳汁的营养上，而是少年时期心智的充盈。贪玩的那种野性中可以建立执着的兴趣，肆意妄为的那点多动中可以培养精彩的思想。从我外婆到我妈妈，从我妈妈到我这里，其中的规律是存在的，只要你实践，只要你运用到与孩

子的互动游戏中，顺势地引导孩子的天性，如此开发出来的才是浑然天成的、独到杰出的、没有完全重样的智慧。

穿梭在旧日的字里行间，妈妈的那些故事呈现了出来。这本《妈妈教的数学》已经点点滴滴汇集成书，同时，爸爸的影子也渐渐清晰起来。我将关于爸爸的那些日记汇总出来，竟然也有十回，容我稍后呈现给您《爸爸教的数学》。

蔡校长写给读者的话

生活处处皆数学

蔡晓东

北京师范大学附属实验中学校长

这是一本源自生活的书，是用人们熟悉的生活场景来介绍数学的书。

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

作者将多数人印象中抽象、深奥、带有神秘色彩的数学生活化了，让数学变得如同平易近人的朋友一样，容易理解、容易接受，这是其他此类图书难以超越的。

这本书对父母来说意义深远，能让父母意识到日常生活的重要性，懂得关注生活，从生活中找到数学的影子，并将这些影子清晰地呈现给孩子。对孩子来说，这本书能帮他们养成一种意识习惯，那就是数学并不是一门高深的学科，它就存在于我们的生活中，是一种在我们身边的、自然且

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

随手可得的知识，是一门能够改善生活的科学。相信在这本书的帮助下，家长能带领孩子以一种轻松的心态迈入数学殿堂的大门。

数学是一门影响人一生的学科，这并不是指一定要掌握许多数学概念、做题技巧，也不仅仅是那些能够自如驾驭数学知识的天才们的专利。数学对人的影响是在思维层面的，能让人在认识、判断、处理事物时更有条理、更加理性。养成这样的思维习惯，才是真正让人一生受用的。作为北京师范大学附属实验中学的校长，我聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

曾经是一名数学老师，能深切地认识到数学思维在我今天的管理工作中起到了多么重要的作用。数学通过影响思考问题的次序、方法，进而影响处理问题的结果。从这个意义上来说，这本书的价值就更大了，能让父母更加有条理地帮助孩子建立理性的思维方法，进而以一种客观、理性的生活态度面对自己的人生。

北京师范大学附属实验中学是一所优秀的学校，能够被录取的学生大都是同龄人中的佼佼者，而这其中那些出色的孩子，通常都在小学阶段打

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

下了扎实的数学基础。他们在入学后表现突出，尤其在接受新事物、学习新知识的时候，非常善于分析、归纳，这些恰恰都是数学中典型的思维方法，都是可以在小学阶段的数学学习中培养出来的思维习惯。

在中学教育中，数学是一门工具类的学科，随着知识的深入、抽象，孩子往往会觉得数学越来越深奥。其实，数学是源自生活的，是一门有丰富生活背景的学科，应用极其广泛。它不仅仅是自然科学，在社会科学中也有大量的应用。这本书从家长这个聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

层面入手，通过日常生活切入数学这门学科，行文浅显易懂又不失严谨，通俗活泼又不失专业，真正传达了“生活处处皆数学”的思想。帮助读者增强数学意识、学会观察生活、习惯用有逻辑的思维方法思考问题，是这本书对普通大众最有帮助的地方。

这本书的作者孙路弘曾经是我们学校的数学教师，是我曾经的同事，他将自己的生活经历生动地展现给读者，这是他对自我追求的里程碑式的总结，也是对中国数学教育的一种思考。字里行间，可以感受到孙老师对

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

数学教育的期望，那就是让更多的父母与孩子尽早体会到有趣、正确、自然的数学思想。我期望他能够如愿，也希望更多的读者从这本书中受益！

保教授写给读者的话

为未来浇灌数学之树

保继光

北京师范大学数学科学学院教授、数学科学

学院前院长

中国数学会常务理事兼基础教育工作委员会

主任

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

孙路弘和我是大学同学，毕业后又同在北京师范大学工作。我在数学系教大学生，他在实验中学教中学生。三十年过去了，我对他最深刻的印象是“思维敏捷”“语出惊人”“想法独到”。后来，他在海外发展，成为成功人士。最近，看到他的新作《妈妈教的数学》，才深深地体会到其中的原因。

美国发布的《2025年的数学科学》（The Mathematical Sciences in 2025）报告指出：“实践证明，数学学科正日益成为许多研究领域不可或缺的聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

重要组成部分，几乎渗透到日常生活的各个方面。”目前，中国的数学专业已走出了20世纪90年代的低谷，成为越来越多家长与考生向往的专业。“虽然不一定终身以数学为职业，但本科阶段学数学一定是对的”几乎已成为社会共识。

我认为，很多人对数学的喜好是从众的，而数学对人们来说是神秘的。《妈妈教的数学》一书从百姓现实生活中的点点滴滴（如计算水电费、称重量、数手指等）出发，上升到“点到为止”的儿童心理学的高度，使聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

得数学走进大众，走进教育。事实上，数学本来就是来自生活、高于生活，从形象思维发展为逻辑思维和抽象思维的。

米尔顿·弗里德曼（Milton Friedman）在发表菲尔兹奖章获奖感言时说：“浇灌数学之树使之常青，成了我义不容辞的责任……最根本的是要努力改变社会导向，使孩子们从上小学起就能喜欢数学而不是视数学为畏途。”

孙路弘的这本书让人耳目一新，

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

既使父母唤起儿时的回忆，又让孩子接受数学的“随风潜入夜，润物细无声”，也给人们指明了一条克服“见着数学就发怵”的道路。

王博士写给读者的话

妈妈——早期智慧的培育者

王亦洲

美国加州大学洛杉矶分校计算机博士
北京大学“百人计划”研究员、北京大学信息
科学技术学院博士生导师

看到这本书时，我眼前一亮，首先是被题目吸引。“妈妈教的数学”让我想起以前看过的一篇文章，讲妈妈的智商、性格、素质对孩子的巨大影响。历史上也有很多伟人，在回忆往昔时，都提到了妈妈对自己儿时、少年时期的教育有着极其深远的影响。由此所思，本书是一本源自生活的图书。这本书通过作者的亲身经历，谈到了一位普通母亲在日常生活中，如何以闪亮的智慧，从大量的生活细节出发，启发儿子的数学智慧。

其次，我被目录中的内容所吸引

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

。全书谈及的都是日常生活中能接触到的平凡事物（表格、游戏、词汇等）。深究细读，让我体会到貌似寻常的生活中，竟蕴藏着如此美妙的数学原理。忙于生活的人们常忽略了这些数学智慧无声的存在，而这些事物的产生或发明往往蕴含着人类朴实（数学）思想的精华。

这些内容大都是我们那个年代（20世纪70年代）小学数学教育中所没有涉及的。绝大多数科学与技术都是为了服务于人类日常生活而产生的。我认为“生活中的数学”对数学的初等

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

教育非常重要，它可以让孩子了解数学的用处、培养孩子学习数学的兴趣、启发孩子对实际问题的抽象思维能力和形式化能力，这对孩子今后形成科学思维习惯具有重要的奠基作用。我认为，对孩子思维方法上的启蒙教育至关重要，甚至会决定一个民族的素质。

小学时期的数学内容是基础，那个时代的小学数学大纲内容，从认识数字，到加减乘除四则运算，再到应用题，都有涉及，这些内容对将来的数学学习都很重要。而对孩子来说，
聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

培养对数学的热爱、对数学的兴趣更加重要，这比死记九九乘法表、大量四则运算的反复操练要更有意义。从感性上了解数学的用处，培养对数学的兴趣而不是惧怕数学，培养正确严谨的思维方法和对问题的抽象思维能力，这些才应该是初等数学教育的核心战略。

我从15岁起就认识作者孙路弘老师了，当时他是我的初中数学老师，那时对他的印象是严格、严谨、严肃。26年后的今天，在与孙老师的聚会交谈中，却感受到老师智慧、思考的

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

一面。交谈中聊及机器学习、大数据这些非常前沿的研究领域和当下从小学直至大学教育中存在的问题时，他也有自己非常独到的见解，这些都反映出一位资深教育工作者那种深刻与敏锐的思维。他能够用平实的语言，以自己从小的成长经历和母亲潜移默化的启发为线索，向读者介绍我们日常生活中蕴含的数学原理与思想，这是作者教育智慧的体现。

每个人都会经历小学的阶段，都会在妈妈的呵护、教育下慢慢长大。这本书写出了一位聪明的母亲对孩子

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

数学思想的启蒙。如果我们每个人都能够回忆一下小时候从母亲那里所感悟到的、影响你一生的东西，把它写下来，将会是一笔不小的财富。这种回忆也许会促使我们回过头来审视、思考自己成长的轨迹，也许会启发现在的妈妈们更加智慧地教育下一代，也许还会启迪我们找到一个民族厚积薄发的源泉.....

测试题答案

第一题： **A**

说明：触觉模式是所有孩子成长天生擅长的学习模式，一直持续到六岁左右。

第二题： **CADB**

说明：很多人都是凭借模糊的感觉，严重缺乏严谨的态度，较真的精神，

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

对待自己孩子的未来，不值得较真吗？

第三题：BACD

说明：这就是失去信心了，长大后，自卑的表现源泉都是这个，很多人说我小时候就是数学不好，其实都是多次出错被打击的结果造成的印象。

第四题：BCAD

说明：这是最大的原因，资源不够，很多事情也就做不到符合规律了，以效率为核心的事情，都会丧失效果，
聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

尤其是长期效果。

第五题： **B**

说明：视觉学习是从6岁开始发展的，随着抽象词汇数量的增加，能够渐渐掌握抽象词汇，并表现出与同龄人不同的理解能力。4岁后继续使用绘本，会严重降低抽象理解的发展速度。

第六题： **BDAC**

说明：读者陷入了解题的好奇中，而没有理解本意并不是解题，而是创造

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

更多的形式来玩。

第七题： **BCAD**

说明：对，妈妈把数字与作者自己的生活结合，触发了兴趣。

第八题： **A**

说明：能够具体落实，才是一本书对读者真正的价值，也才应该成为读者读书的核心目的。

第九题： **CADB**

说明：父母比较随意地指责孩子，将错题原因归结为态度问题，这是对孩子伤害最大的做法，却是最常见的做法。

第十题：C

说明：让孩子自己讲出来，才是正确做法。



每回合测试题及解析扫码即得

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书



扫描窃听作者的话：内有互动视频哦

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

湛庐，与思想有关……

如何阅读商业图书

商业图书与其他类型的图书，由于阅读目的和方式的不同，因此有其特定的阅读原则和阅读方法，先从一本书开始尝试，再熟练应用。

阅读原则1 二八原则

对商业图书来说，80%的精华价值可能仅占20%的页码。要根据自己的阅读能力，进行阅读时间的分配。

阅读原则2 集中优势精力原则

在一个特定的时间段内，集中突破20%的精华内容。也可以在一个时间段内，集中攻克一个主题的阅读。

阅读原则3 递进原则

高效率的阅读并不一定要按照页码顺序展开，可以挑选自己感兴趣的部分阅读，再从兴趣点扩展到其他部分。阅读商业图书切忌贪多，从一个小主题开始，先培养自己的阅读能力，了解文字风格、观点阐述以及案例描述的方法，目的在于对方法的掌握，这才是最重要的。

阅读原则4 好为人师原则

在朋友圈中主导、控制话题，引导话题向自己设计的方向去发展，可以让读书收获更加扎实、实用、有效。

阅读方法与阅读习惯的养成

- (1) 回想。阅读商业图书常常不会一口气读完，第二次拿起书时，至少用15分钟回想上次阅读的内容，不要翻看，实在想不起来再翻看。严格训练自己，一定要回想，坚持50次，会逐渐养成习惯。
- (2) 做笔记。不要试图让笔记具有很强的逻辑性和系统性，不需要有深刻的见解和思想，只要是文字，就是对大脑的锻炼。在空白处多写多画，随笔、符号、涂色、书签、便签、折页，甚至拆书都可以。
- (3) 读后感和PPT。坚持写读后感可以大幅度提高阅读能力，做PPT可以提高逻辑分析能力。从写读后感开始，写上5篇以后，再尝试做PPT。连续做上5个PPT，再重复写三次读后感。如此坚持，阅读能力将会大幅度提高。
- (4) 思想的超越。要养成上述阅读习惯，通常需要6个月的严格训练，至少完成4本书的阅读。你会慢慢发现，自己的思想开始跳脱出来，开始有了超越作者的感觉。比拟作者、超越作者、试图凌驾于作者之上思考问题，是阅读能力提高的必然结果。



扫码关注湛庐文化，
回复“阅读”

这5种方法，让读过的书变成你的影子

[特别感谢：营销及销售行为专家 孙路弘 智慧支持！]

✎ 我们出版的所有图书，封底和前勒口都有“湛庐文化”的标志



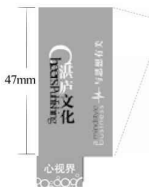
并归于两个品牌



✎ 找“小红帽”

为了便于读者在浩如烟海的书架陈列中清楚地找到湛庐，我们在每本图书的封面左上角，以及书脊上部 47mm 处，以红色作为标记——称之为“小红帽”。同时，封面左上角标记“湛庐文化 Slogan”，书脊上标记“湛庐文化 Logo”，且下方标注图书所属品牌。

湛庐文化主力打造两个品牌：**财富汇**，致力于为商界人士提供国内外优秀的经济管理类图书；**心视界**，旨在通过心理学大师、心灵导师的专业指导为读者提供改善生活和心境的通路。



✎ 阅读的最大成本

读者在选购图书的时候，往往把成本支出的焦点放在书价上，其实不然。

时间才是读者付出的最大阅读成本。

阅读的时间成本=选择花费的时间+阅读花费的时间+误读浪费的时间

湛庐希望成为一个“与思想有关”的组织，成为中国与世界思想交汇的聚集地。通过我们的工作和努力，潜移默化地改变中国人、商业组织的思维方式，与世界先进的理念接轨，帮助国内的企业和经理人，融入世界，这是我们的使命和价值。

我们知道，这项工作就像跑马拉松，是极其漫长和艰苦的。但是我们有决心和毅力去不断推动，在朝着我们目标前进的道路上，所有人都是同行者和推动者。希望更多的专家、学者、读者一起来加入我们的队伍，在当下改变未来。

聚辛堂juxintang.cn 每日电子书

湛庐文化获奖书目

《大数据时代》

- 国家图书馆“第九届文津奖”十本获奖图书之一
- CCTV“2013中国好书”25本获奖图书之一
- 《光明日报》2013年度《光明书榜》入选图书
- 《第一财经日报》2013年第一财经金融价值榜“推荐财经图书奖”
- 2013年度和讯华文财经图书大奖
- 2013亚马逊年度图书排行榜经济管理类图书榜首
- 《中国企业家》年度好书经管类TOP10
- 《创业家》5年来最值得创业者读的10本书”
- 《商学院》2013经理人阅读趣味年报·科技和社会发展趋势类最受关注图书”
- 《中国新闻出版报》2013年度好书20本之一
- 2013百道网·中国好书榜·财经类TOP100榜首
- 2013蓝狮子·腾讯文学十大最佳商业图书和最受欢迎的数字阅读出版物
- 2013京东经管图书年度畅销榜上榜图书，综合排名第一，经济类榜榜首

《牛奶可乐经济学》

- 国家图书馆“第四届文津奖”十本获奖图书之一
- 搜狐、《第一财经日报》2008年十本最佳商业图书

《影响力》(经典版)

- 《商学院》2013经理人阅读趣味年报·心理学和行为科学类最受关注图书”
- 2013亚马逊年度图书分类榜心理励志图书第八名
- 《财富》鼎力推荐的75本商业必读书之一

《人人时代》(原名《未来是湿的》)

- CCTV《午午书简》·《中国图书商报》2009年度最值得读的30本好书之“年度最佳财经图书”
- 《第一财经周刊》·蓝狮子读书会·新浪网2009年度十佳商业图书TOP5

《认知盈余》

- 《商学院》2013经理人阅读趣味年报·科技和社会发展趋势类最受关注图书”
- 2011年度和讯华文财经图书大奖

《大而不倒》

- 《金融时报》·高盛2010年度最佳商业图书入选作品
- 美国《外交政策》杂志评选的全球思想家正在阅读的20本书之一
- 蓝狮子·新浪2010年度十大最佳商业图书、《智慧悦读》2010年度十大最具价值经管图书

《第一大亨》

- 普利策传记奖，美国国家图书奖
- 2013中国好书榜·财经类TOP100

《真实的幸福》

- 《第一财经周刊》2014年度商业图书TOP10
- 《职场》2010年度最具阅读价值的10本职场书籍

《星际穿越》

- 国家图书馆“第十一届文津奖”十本获奖图书之一
- 2015年全国优秀科普作品三等奖
- 《环球科学》2015最美科学阅读TOP10

《翻转课堂的可行学院》

- 《中国教师报》2014年度“影响教师的100本书”TOP10
- 《第一财经周刊》2014年度商业图书TOP10



湛庐文化获奖书目

《爱哭鬼小华》

国家图书馆“第九届文津奖”十本获奖图书之一

《新京报》2013年度童书

《中国教育报》2013年度教师推荐的10大童书

新阅读研究所“2013年度最佳童书”

《群体性孤独》

国家图书馆“第十届文津奖”十本获奖图书之一

2014“腾讯网·啖书局”TMT十大最佳图书

《用心教养》

国家新闻出版广电总局2014年度“大众喜爱的50种图书”生活与科普类TOP6

《正能量》

《新智囊》2012年经管类十大图书，京东2012好书榜年度新书

《正义之心》

《第一财经周刊》2014年度商业图书TOP10

《神话的力量》

《心理月刊》2011年度最佳图书奖

《当音乐停止之后》

《中欧商业评论》2014年度经管好书榜·经济金融类

《富足》

《哈佛商业评论》2015年最值得读的八本好书

2014“腾讯网·啖书局”TMT十大最佳图书

《稀缺》

《第一财经周刊》2014年度商业图书TOP10

《中欧商业评论》2014年度经管好书榜·企业管理类

《大爆炸式创新》

《中欧商业评论》2014年度经管好书榜·企业管理类

《技术的本质》

2014“腾讯网·啖书局”TMT十大最佳图书

《社交网络改变世界》

新华网、中国出版传媒2013年度中国影响力图书

《孵化Twitter》

2013年11月亚马逊(美国)月度最佳图书

《第一财经周刊》2014年度商业图书TOP10

《谁是谷歌想要的人才?》

《出版商务周报》2013年度风云图书·励志类上榜书籍

《卡普新生儿安抚法》最快乐的宝宝1·0~1岁

2013新浪“养育有道”年度论坛养育类图书推荐奖



延伸阅读

《全脑教养法2》

- ◎ 美国著名的儿童积极心理学家丹尼尔·西格尔力作。西格尔为天下父母揭秘前所未见的脑科学知识，破解种种育儿难题。“情商之父”丹尼尔·戈尔曼力荐。
- ◎ 神奇的“全脑教养12法”。整合上下脑、整合左右脑、整合记忆、整合自我、整合自我与他人——孩子的大脑一旦整合为一个整体运转，父母就能培养出一个心智健康的“全脑儿童”。



扫码点达本书购买链接



《教出乐观的孩子》(经典版)

- ◎ 积极心理学之父马丁·塞利格曼集30年、千百个成人及儿童研究之精华著成的教育经典。书中重墨提及积极心理教育在学校实践中的成功应用，富有借鉴意义。
- ◎ CCTV《读书》5期联读的幸福经典系列作品。

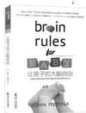


扫码点达本书购买链接



《让孩子的大脑自由》

- ◎ 知名神经科学家及畅销书作家。约翰·梅迪纳博士是美国权威的神经科学家、发展分子生物专家及研究顾问，主要研究人脑发展基因及精神病遗传学问题。
- ◎ 亚马逊心理书籍销售冠军《让大脑自由》之家庭教养版。本书成功填补了科学和通俗之间的鸿沟，揭秘教养误区中的若干迷思，带给你超震撼的育儿法则，帮助天下父母养出聪明、健康、快乐的孩子。



扫码点达本书购买链接



《由内而外的教养》

- ◎ 我们的经历塑造了我们的大脑，同样，我们给孩子提供的经历塑造了他们的大脑。养育健康、乐观的孩子，首先要认识自己，接纳自己。
- ◎ 本书精选的脑科学与正文内容互为补充，为寻求专业知识的读者提供翔实解答，并为书中的教养方式提供科学依据。



扫码点达本书购买链接



[1] 乘以8、乘以7的手法诀窍参考本书第87页“第六回 从手指开窍出大脑智慧”。